FRANCISCI à SCHOOTEN

PRINCIPIA MATHESEOS VNIVERSALIS,

SEV

INTRODUCTIO

AD

GEOMETRIÆ METHODUM RENATI DES CARTES,

EDITA AB

ER. BARTHOLINO, CASP. FIL.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE



LVGD. BATAV.

Ex Officinâ Elſeviriorum.

CIↃ IↃC LI.

Bibl. M: M: ad us. Philos. C. Rom.

Generis & virtutum Nobilitate Perilluſtri & Generoſo Heroi,

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

D. CHRISTIANO THOMÆ,

TOPARCHÆ IN STAUGARD,

Equiti Aurato, Sereniſſimæ Regiæ Majeſtatis Cancellario Magno, Regni Daniæ Senatori primario, Regiæ Academiæ Hafnienſis Conſervatori ſummo, Patrono incomparabili.

NOn minùs verè quàm eleganter, Cicero lib. 1. Tuſc. quæſt. *Magni*, inquit, *eſt ingenii revocare mentem à ſenſibus, & cogitationem à conſuetudine abducere.* Cum enim mens noſtra, quam in nobis concluſam circumferimus, divina quædam particu-

la habeatur, nihil ſanè illi gratius accidere poteſt, quàm, cùm contemplando à corporeis rebus laxatur, originique ſuæ quàm ſimillima redditur. Senſuum quippe uſurâ non minus fruuntur bruta animantia, quàm homines, imò, quædam longè nobis præſtant; mente verò quia non gaudent, univerſam hanc mundi machinam, quaſi tabulam pictam aſpiciunt, nec cogitant quâ de cauſâ quóve modo tot varietates rerum ſint ordinatæ. Quicunque igitur hominum non cupiunt ſemetipſos privare bono, quo reliqua animantia excedunt, non temerè permittent ſeſe ſenſuum judicio ita mancipari, ut ea ſufficere putent, quæ manibus quaſi palpare poſſunt, ac pauca velint ſi non oculis omnium obvia, pauciora credant quæ ſenſus non approbant, & pauciſſima eligant, niſi ab experientiâ fir-

firmentur. Non equidem diffiteri poſſumus, hoc propoſitum utile eſſe atque neceſſarium, ut initiò juvetur cogitatio noſtra & intellectus; unde factum eſt, quòd Geometræ figuras, Arithmetici numerorum characteres, aliique alia ſubſidia invenerint; Sed experimentis ejuſmodi vix acquieſcere debent magna ingenia, nec poteſt is, qui ſapientiæ famam affectat. Communis enim experientia docet, multa facilè mereri mentis aſſenſum, & eſſe veriſſima, etiamſi ſenſuum judicio pro veris non agnoſcantur: & vice verſâ, ſenſus quædam approbare; quæ, quia falſa, ratio nullo modo admittere poteſt. Atque hæc licèt omnibus in confeſſo ſint, non deſunt tamen, qui nihil niſi Praxin amantes, Theoriam & ſpeculationes omnes odio proſequuntur, atque ut inutilia eliminant: quos pertina-

tinaciæ ſuæ ſerò nimis pœnitebit, cùm aliorum imperio ita ſubjecti eſſe cogũtur, ut ne in Praxi quidem ſolita obſtacula removere ſciant, nec unquam novi quicquam addiſcant, niſi quod vel caſus ipſis, vel aliorum humanitas ſuppeditaverit. At alii, quorum animus longiùs exſpatiatur, & demonſtrationes cauſaſque inquirit, utilia multa inveniunt, quæ ab aliis ignorantur; adeoque in Praxi multa excogitantes compendia, allaborant ut tædia & impedimenta obvia tollantur; quorum tamen inventa non eſſent repudianda, etiamſi humani ingenii imbecillitas, aut uſus raritas, ea ſtatim ad praxin revocare prohiberet. Hinc non contenti doctiores iis, quæ à Geometris aut Arithmeticis demonſtrata atque inventa ſunt, quæque uſus dudum confirmavit, niſi vel ipſas demonſtrationes

nes penetrare, eaſdemque invenire poſſint; adeoque ſuperflua reſcindere, defectus ſupplere, & deperdita reſtituere queant. Neque enim exiſtimandum eſt, majores noſtros omnem poſteris præripuiſſe materiem, quâ excolatur ingenium; cum contra ſocordiæ meritò nos incuſarent, ſi plus temporis in ſcriptis ſuis etiamnum intelligendis impendi, quàm ipſi in incognitis inveniendis poſuêre, viderent. Ad quę invenienda cum nõ aliâ viâ, (quantum conſtat) quàm quæ per compoſitionem & reſolutionem procedit, uterentur, quæq; naturalis potiùs ingenii facultas aut induſtria, uſu & exercitatione potita, quàm ars certis legibus & præceptis contenta, dici meretur; Recentiores artem quandam excogitarunt, quam vocant Analyticam, cujus principia tradit hoc opuſculum. quæ

poſt-

poſtquam innotuit, longè plura & majora, quàm ab Antiquitate nobis relicta ſunt, in lucem prodiêre. Non patitur tempus & lex ſcribendi, ut commemorem, quanta ex hâc arte, non tantùm ad Arithmeticam, Geometriam, Mechanicam, ſed etiam Opticam aliaſque ſcientias manaverint emolumenta. Nihil enim ſani antehac de viſu novimus, cum omnia hîc, ſicut in aliis artibus, quæ materiæ immerſæ, non abſtrahuntur à ſenſibus, ad directionem mentis, diſputationibus huc illuc trahebantur; jam omnia determinata, omnia demonſtrationibus munita. Qui enim in Opticis non planè hoſpites ſunt, ſat ſciunt, quàm incerta, quamque defectuoſa fuerint ea, quæ de Refractionum legibus antea novimus, & quàm falſa illa determinatio figuræ vitrorum, (de quibus Dioptrica

trica

trica agit) quâ nihil jam nobis optari poteſt perfectius, nihil certius. ſed de his forſan aliàs. Id mihi in præſens ſufficit, hanc artem ſibi proprio jure vendicare non ſolùm ea, quæ de Matheſeos utilitate, déque Arithmeticæ, Geometriæ, Aſtronomiæ, & Muſicæ præſtantiâ, tot rationibus, tot voluminibus, totque ſeculis dicta ſunt, ſed & multò plura; quod facilè demonſtrare poſſem, niſi plurimis, qui hæc penitius introſpicere dignantur, notum id fore ſcirem. Nec opus mihi eſt, multa coram Te, Heros Perilluſtris, de hujus artis totiuſque Matheſeos utilitate dicere: quoniam, dum animus tuus magna ſemper & excelſa meditatur, Mathematicas etiam ſcientias coluiſti & amplexus es, nihilque Tibi ad ſapientiæ complementum deeſſe voluiſti. Sed malo de Heroïcis & eximiis tuis

virtutibus tacendo, publicum omnium teſtimonium implorare, quàm in præſens pauca dicere. Ars ſanè Analytica perſpectum habet, cujus viri præſidium exſpectat, cùm implorat tuum: nec enim Danię unquam, quamdiu Matheſis aliæque artes liberales tales invenerint Patronos, vel virtus vel ſapientia deficiet. Patere igitur, Heros Perilluſtris, nomini tuo Principia hæc inſcribi, & fructum inceptæ peregrinationis ſerenâ fronte accipe. Tui enim nominis clypeo munita, frontem audent obvertere hoſtibus, quibus ſeculum hoc abundat, quique varia tela in obvios effundere non verentur, prout affectus malevoli ipſis dictaverint. Solent plerique qui rodere amant, objicere, pervulgata omnia eſſe & ex aliis deſumpta; quâ cenſurâ quamquam ſciam hoc ſcriptum non

poſſe

poſſe notari; tamen præſagit animus, fore, ut hæc tanquam inutilia & nimis curioſa rejiciant. Si enim intellexerint, hoc ambitu, etiam Algebram complecti; faſtidio commoti, ſubtilitates ejus cane pejus & angue fugient. Sed vix metuet ſibi Ars Analytica à talibus hoſtibus, nam, cum doctiſſimis quibuſque Mathematicis, quibus ſeculum hoc quaſi ſuperbit, probetur, de reliquis ipſi minus eſt laborandum: nec ulla alia hujus Methodi defenſio requiritur, niſi quã experientia, & ipſius rei intellectæ uſus attulerit. Et, ut verba in pauca conferam, ſi tuo exactiſſimo limatiſſimoque judicio probentur, nullius in poſterum cenſuram aut notam pertimeſcent. Neque ego exilitate operis deterritus, ſed contra utilitate potius inſtigatus, Tibi hæc conſecrare ſum veritus: & quidem tantâ majore

 fiduciâ,

fiduciâ & ſpe certiore, quantò certius mihi conſtat Te omnibus iis, qui inter bonas artes etiam Mathematicis incumbunt, favere; quem favorem quotidie familia noſtra ſentit, & grato animo ſemper recolit. Vale regni Daniæ decus, & æqui bonique conſule hoc grati animi monumentum, quod humillimè offert

PERILLVSTRIS GENEROSITATIS TVÆ

Scribebam Leidæ Anno CIƆ IƆC L. *Calend. Iun.*

Devotiſſimus & obſequentiſſimus cliens

Eraſmius Bartholinus.

PRÆ-

PRÆFATIO
IN HÆC PRINCIPIA, ET
DE MODO LEGENDI
GEOMETRIAM.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

CVm omnes ſapientes audire velint, & nihil tam temerarium tamque indignum ſapientis gravitate atque conſtantia ſit, quam aut falſum ſentire, aut quod non ſatis exploratum ſit, ſine ulla dubitatione defendere: neſcio quo fato fiat, quod non operam dent ejuſmodi ſtudiorum viam ingredi, qua mens adſueſcat verum à falſis & dubiis diſtinguere. Quandoquidem enim à teneris adſueſcere multum eſt, egregie ſibi conſulerent, ſi ad Matheſin excolendam ab ineunte ætate animum appellerent. Mathematicas autem diſciplinas hanc præ aliis habere prærogativam, vix dubitari poteſt, modò conſideretur, quicquid in iis concluditur & determinatur, id omne ex præmiſſis neceſſitate quadam ſequi: vel verum, vel dubium, vel falſum, prout præmiſſa variis modis ſeſe habuerint: Adeo ut, etſi non aliis uſibus inſerviret Matheſis; tamen vel hoc nomine, ad ſui cognitionem trahere deberet etiam eos, quibus nullum aliud ex eâ ſperaretur emolumentum. Quod cum abunde obſervatum & uſu comprobatum ſit à Veteribus, quos plerique noſtra ætate ita ſuſpiciunt & venerantur, ut majus quoddam animo complexi, plus multo etiam vidiſſe videantur, quam quantum noſtrorum ingeniorum acies intueri poteſt; inter alia mirari ſubit, omnes fere, exemplum illorum hac in re deſeruiſſe. Quippe compertum eſt, antiquos Philoſophos non permiſiſſe, ἀγεωμετρήτους ſcholas ſuas ingredi, ut ad Sapientiæ ſtudium admitterentur, quiq; ante non haberent λαβὰς τῆς φιλοσοφίας. Quod ſanè propoſitum, non ratione prudentius, quam eventu felicius fuit: cum hanc fuiſſe cauſam, quod ad illam pertigerint ſcientiam, quam poſteritas tantopere miratur, & quò virtute ſua nonnulli eniti ſe poſſe deſperant, conjiciam. Fruſtra enim ſpectatur fructus diſciplinarum, ab eo, qui earum altitudinem non metitur; nec in cacumen evadere poteſt, qui non ſolerter rimatur viam, & aditus, qui eò ferunt, negligit. Matheſis autem, cum ex notionibus ſimpliciſſimis, cognituque facillimis, ad difficiliora atque remotiſſima quæque cognoſcenda perducat juniores, qui præconceptis opinionibus vacui, non impediuntur varietate rerum, quæ animis provectiorum inhærent; non dubito, quin ſi ea à teneris imbuatur mens, ad aliarum quoque rerum, maxime compoſitarum atque obſcuriorum, cognitionem ſit penetratura. Et quoniam Matheſis variis partibus conſtat, quæ omnes circa

quantitatem verſantur; res à noſtri ſeculi Luminibus eò redacta eſt, ut generaliter illæ omnes tractari, & quantitas hæc in univerſali & abſtracto per literas Alphabeti concipi poſſit. Ita enim, facta ad omnes quantitatis ſpecies applicatione, intellectus ratiocinando ad varias res inveniendas diſtincte progredi poteſt. Poſtquam autem Methodus illa diu latuit, tecta verborum involucris, cum quibus prius luctandum erat quam fructus ullus ſperari poterat; opportune nobis Nobiliſſimus D. Des-Cartes, inſuperabilis ingenii Vir (qui, recluſâ à ſe, hactenus incognita, ad veram ſapientiam via, poſt tot ſeculorum fœdiſſimam ſervitutem, omnibus imitando exemplo, ita naturæ myſteria pandit, ut veræ ſapientiæ ſtudium, humanarumq; ſcientiarum encyclopedia & perfectio, immatura ejus ac deplorabili morte, majorem nunquam jacturam facere potuerit) eam ad hanc facilitatem perduxit, ut, quod difficultatis reliquum eſt, non alia ratione quam ſtudio & diligentia evinci poſſit. Taceo hîc perfectionem, ad quam res Mathematicas hujus Methodi ſubſidio redegit: cum ipſarum teſtimonia non tantùm invitos laudumque ſuarum detractores in illis palmam ei dare cogant, ſed etiam quouſque humanum ingenium in iiſdem progredi quidve præſtare valeat determinent. Verum enimvero cum omnium magnarum rerum ſicut arborum altitudo nos delectet, & radices ſtirpeſq; non item: ſic multi ad ſumma pervenire optarent, niſi in elementis hærere opus haberent. atqui, quemadmodum illa altitudo ſine radicibus, ſtirpibuſque eſſe non poteſt; ita illi fruſtra ſe in id faſtigium recipi ſperant, quibus cordi non eſt fundamenta fideliter jacere. Et cum antehac non edita ſint ulla principia, quæ ad adyta hujus Methodi ducerent; quid mirum? ſi multi in ipſo limine hæſitaverint, pluresque, quos, re inexpertâ, deſperatio in fugam averterit. Etenim nec hujus Methodi Auctor, nec Doctiſſimi ejus Commentatores à ſemetipſis impetrare potuerunt, ut bonas horas, quas ſubtilioribus inventis dicaverant, in edendis, quæ viam ad hanc Methodum ſternerent, impenderent. Cum itaque nihil hac in re, omnibus votis, tam à me ipſo olim, quam à multis hodie expetita, præſtitum eſſe reperirem: diu multumque inter ſpem & metum hærens, dolui, tamdiu inter tot Mathematicorum monumenta ea deſiderari, quæ ad ſcientiarum incrementa emunctioris naris homines neceſſario requiri jam pridem cœperunt. Ego ſane opportunitate mira, ante aliquot annos voti compos factus, poſtquam ad haſce oras, Academiam Illuſtrem, quæ Leidæ eſt, acceſſi, Vir Celeberrimus atque Doctiſſimus Franciſcus à Schooten, Matheſeos ibidem Profeſſor publicus, me Artem Analyticam, hancque Methodum, tam eximia fide docuit, ut ad perfectionem nihil mihi præter ingenium & propriam induſtriam defuiſſe crediderim. Quocirca ſepoſita privati commodi æſtimatione ut plures felicitatis hujus participes facerem, & quæ

quæ propriis uſibus deſtinaveram, publici juris redderem, de elementis hiſce, quibus inter alia imbutus eram, evulgandis, cogitare cœpi. Et licet vererer ne amicitiæ jura, quæ inter nos cum fide ſemper ſervari optabam, hac ratione violarem; tamen facilem mihi veniam ſperabam, ſi non niſi officioſa fraude fallerem, quæ gloriæ ejus, qui ſe bono publico uni devovit, cedere, nec aliàs magis animum meum gratum teſtari poſſet. Ac ne primas quidem ſpes fortuna deſtituit; quippe ab ipſo, qui nullum erga me benevolentiæ pignus atque indicium omittit, non modò veniam hujus zeli impetravi, ſed & eam humanitatem, ut omnia perlegere & examinare haud gravatus fuerit, lucemq; ingenii & conſilii ſui porrigere. Operis brevitatem quod attinet, non eſt, quam diſplicere cuiquam putem: ſiquidem copiam exemplorum, quibus ad diſcendum nihil aptius, nullus (ut opinor) hîc deſiderabit; adeo ut, quicunque tantùm Arithmeticæ Species, cum in integris, tum in fractis perdidicerit, levique numerorum irrationalium notitia inſtructus, in allatis exemplis accurate examinandis ſeſe exercuerit, ſe non inutiliter tempus, ubi ad Geometriam D. Des-Cartes acceſſerit, conſumpſiſſe experturus ſit. Quibus præmiſſis, januam reſeratam videbit omni ei, quod ab Algebra & Analyſi Geometrica exſpectari poteſt: ideoque ſe Matheſeos Vniverſalis conſtitutionem animo comprehendiſſe. neque enim exiſtimo, hiſce intellectis, operæ pretium fore, Algebræ vulgaris cognitionem amplius exoptare, licet leviorem ejus notitiam, vel ipſe D. Des-Cartes antehac, ad ſuæ Geometriæ Methodum intelligendam, requiſiverit. In afferendis autem exemplis hic delectus eſt obſervatus, ut, quoad fieri potuit, in medium adducerentur ea, quæ vel in ipſo Auctore, vel in ejus Commentatoribus reperiuntur: quæ ideo ſparſim ita ſunt diſpoſita, ut, meo judicio, non alio loco melius intelligi, ſimulque prædictis locis illuſtrandis inſervire potuerint. in quem finem, in margine paginarum citationem additam eſſe apparebit.

Principiis hiſce perceptis, poterit, cuicunque uſum eorum addiſcere volupe erit, animum ad ipſam Geometriam legendam applicare. Ne verò tanquam in ignota ſylva vagetur & erret, (quoniam ab Auctore non ita conſcripta eſt, ut ejus Methodus ab unoquoque quam facillime ex illa addiſci queat, ſed tantùm ut quædam ejus ſpecimina ederet) legat primùm ſeptem priores paginas libri primi editionis Latinæ D. à Schooten, una cum ejus Commentariis. Deinde, ut æquationum natura ritè percipiatur, poteſt ruminare ea quæ habentur à linea 8. pag. 77 uſque ad lineam penult. p. 82, ſimul cum explicationibus. Quo facto, poterit, ſatis inſtructus regulis, tum ad æquationes cognoſcendas, tum ad eaſdem reſolvendas neceſſariis, pergere ad quæſtiones ſolvendas; quarum agmen ducat ea, quæ habetur p. 167, tum illæ, quæ reperiuntur p. 273, 274,

275 &

275 & 276. *Inde perlegantur, quæ habentur à linea* 10. *p.* 84 *uſque ad lin.* 18. *p.* 94, *una cum explicationibus à lin.* 9 *pag.* 252 *uſque ad lin* 12. *p.* 258, *ac rurſus à p.* 263 *uſque ad p.* 273. *Poſt hæc, viſa ſolutione Problematis, quod reperitur p.* 168 *& p.* 198, *accedere poterit ad quæſtionem Pappi in tribus aut quatuor lineis p.* 14, *cujus ſolutionis continuatio invenitur à p.* 29 *uſque ad p.* 39, *una cum Notis D. de Beaune à p.* 127 *uſque ad p.* 141, *& Commentariis D. à Schooten eò ſpectantibus. Quibus intellectis, ſi legantur ea, quæ extant p.* 39, *cum Commentariis: & inde videantur Apollonii Loca Plana, à D. à Schooten reſtituta, quæque propediem, favente Deo, eſt editurus; comperiet Lector, ſibi ad præcedentium exercitationem nihil defuturum, ſeque pluribus exemplis edoctum, fructum non ſpernendum reportaturum. Hinc legi poſſunt omnes paginæ ab initio libri ſecundi ad p.* 29 *adjuncta obſervatione quinta ex Notis D. de Beaune, & Commentariis explicationi earundem paginarum inſervientibus. Poſtea incumbere poteſt Lector addiſcendæ conſtructioni Problematum Solidorum, adeoque iis, quæ habentur à p.* 95. *uſque ad p.* 108, *una cum Notis p.* 158 *ſeq. & Commentariis à p.* 276 *uſque ad p.* 295, *ut & p.* 258, 259, 260, 261 *&* 262. *Quam cùm perceperit, pergat in quæſtione Pappi in quinque lineis propoſita, nempe à pag.* 39 *uſque ad p.* 45. *Tum reliquum libri primi lectione perpendat; iiſque intellectis, ea quæ occurrunt à linea antepenultima p.* 82 *uſque ad lin.* 10. *p.* 84, *& à pag.* 108 *uſque ad finem libri tertii, adjecta etiam explicatione. Quibus ſi ſubjungantur reliqua libri ſecundi, à p.* 45 *uſque ad finem, cum notis & commentariis; non video, quid ad intelligendam Geometriam, à D. Des-Cartes editam, amplius deſiderari poſſit. Quid autem illa tandem valeat, aut ejus Methodo ſolvi poſſit, inter innumera alia, ea, quæ Coronidis loco ibi ſubnexa ſunt, ſatis ſuperque edocebunt. Vale. Scripſi Leidæ, anno Chriſti* CIↃ IↃC L. *Poſtridie Non. Maii.*

FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN
PRINCIPIA
MATHESEOS VNIVERSALIS,
SEV
INTRODUCTIO
AD
GEOMETRIÆ METHODVM
RENATI DES CARTES.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

De logiſtica quantitatum ſimplicium.

CVM in omni ſcientiâ, ad difficiliorum rerum cognitionem, utile ſit à ſimpliciſſimis & cognitu facillimis ordiri; non è re fuerit, ad generalem atque facilem comprehenſionem Mathematicarum, quæ omnes circa quantitatem verſantur, ad ea primùm attendere, quæ non aliquam ejus ſpeciem excludere, ſed eas, quocunque ſe habeant modo, ſub certis notis cuique obviis repreſentare poſſint. Unde cum in univerſâ Mathematicarum Scientiarum conſtitutione, licèt diverſa objecta reſpiciant, non niſi relationes ſive proportiones quædam, quæ in iis reperiuntur, conſiderentur; conſentaneum eſt rationes *Vide diſſertationem de methodo pag. 18.*

atque proportiones illas ſeorſim ſpectare, eaſque literis Alphabeti, utpote notis ſimpliciſſimis nobiſque cognitiſſimis, inſignire. Neque enim ratio ulla eſt, quo minùs per *a*, *b*, *c* &c. concipiantur magnitudines *a*, *b*, *c* &c. quàm pondera aut numeri iiſdem characteribus deſignati. Attamen quia tum phantaſiæ tum ſenſibus ipſis, nihil ſimplicius nec diſtinctius exhiberi poſſe occurrit, quàm rectæ lineæ, quæque relationes & proportiones, quæ inter omnes alias res inveniuntur, exprimere valent: præſtat per prædictas literas ſolummodo lineas rectas concipere. Hinc ſi duæ fuerint quantitates deſignatæ per *a* & *b*, intelligentur per ipſas duæ differentes lineæ rectæ, diverſæ ſcilicet longitudinis: ita ut per *a* intelligatur longitudo ſeu quantitas unius, & per *b* longitudo ſeu quantitas alterius. Non ſecus atque per *a* & *a*, aut per *b* & *b* duæ intelliguntur lineæ æquales; niſi indicaveris ſive ſuppoſueris *a* eſſe æqualem ipſi *b*, vel *a* & *b* ejuſdem eſſe valoris, id quod ſic denotatur *a* ∞ *b*. Et ſic de aliis.

Cum autem non rarò occurrat, ut linea aliqua ſit aliquoties ſumenda, oportet tantùm numerum convenientem ipſi literæ præfigere: Ut ad deſignandum, lineam *a* eſſe bis ſumendam, ſcribo 2*a*. Sic & ad deſignandum duplum, triplum, quadruplum &c. ipſius *b*, ſcribo 2*b*, 3*b*, 4*b* &c. Nec aliter fit ſi ad deſignandum ſemiſſem, tertiam, aut aliam quamcunque partem lineæ *a*, ſcribatur $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c. id quod etiam hoc pacto fieri ſolet $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$ &c. ſic & duas tertias, tres quartas &c. ipſius *b*, ita deſignaveris $\frac{2}{3}b$, $\frac{3}{4}b$: vel ſic, $\frac{2b}{3}$, $\frac{3b}{4}$, atque ita de aliis.

Jam cum in univerſâ Matheſi operationes omnes ad quinque diverſas (vulgò Species dictas) reduci poſſint, quæ ſunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, & Radicum extractio; conſequens eſt ut oſtendatur quâ ratione dictæ operationes per literas ſint inſtituendæ.

De Additione quantitatum ſimplicium.

IGitur ad addendum lineam *a* ad lineam *a*, ſcribo pro ſummâ 2*a*: ſic & ad addendum 2*b* ad 3*b*, ſcribo 5*b*. Lineę enim eiſdem literis ſi denotantur, oportet tantùm numeros præfixos addere, & ſummam eidem literæ præfigere. Si verò diverſæ fuerint, additio fiet inter-

interpoſito ſigno +, quod denotat plus. Ut ſi ad lineam *a* ſit addenda linea *b*, ſcribo *a*+*b*, hoc eſt, *a* plus *b*, quo indicatur *b* eſſe additam ipſi *a*, vel adhuc eſſe addendam. Ubi patet dictum ſignum ſemper eſſe referendum ad ſequentem literam, ſeu quæ priori addi debet.

Nec aliter fit ſi plures in unam ſummam ſunt colligendæ. Ut ad addendum 2 *b*, *b*, & 3 *b*, ſcribo 6 *b*. Sic & ad addendum *a*, *b* & *c*, ſcribo *a*+*b*+*c*.

Exempla additionis ſimplicium.

				2*b*.
Add.	*a*.	2*b*.	3*d*.	*b*.
	a.	3*b*.	*d*.	3*b*.
Summa	2*a*.	5*b*.	4*d*.	6*b*.

				a.
Add.	*a*.	*a*.	3*c*.	*b*.
	b.	2*b*.	4*d*.	*c*.
Summa	*a*+*b*.	*a*+2*b*.	3*c*+4*d*.	*a*+*b*+*c*.

Ubi notandum, in additione literarum *d* & 3 *d*, cogitandum eſſe literam *d* ſibi præfixam habere unitatem: id quod etiam in ſequenti exemplo, & ſimilibus eſt obſervandum: ut &, cùm plures adduntur diverſæ literæ, perinde eſſe quo ordine ſcribantur, ut *a*+*b*, vel *b*+*a*.

De Subtractione quantitatum ſimplicium.

IAm verò ad ſubtrahendum lineam 2*a*, à lineâ 5*a*, ſcribendum eſt 3 *a*: ſiquidem lineæ, quæ iiſdem literis ſunt deſignatæ, ſubducuntur, ſubtrahendo tantùm à ſe invicem numeros præfixos. Sic & ſi 2 *b* auferantur à 3 *b*, reliquum erit 1 *b* ſeu *b*. Similiter ſublato *d* de 4 *d*, relinquitur 3 *d*: At *a* de *a* manet o ſeu nihil.

Quòd ſi verò lineæ diverſis literis notatæ fuerint, ſubductio fiet interpoſito ſigno -, quod denotat minus. Ut ſi ab *a* ſubtrahenda ſit *b*, ſcribo *a* - *b*, hoc eſt, *a* minus *b*, quo indicatur *b* eſſe ſublatam ex *a*, vel adhuc eſſe ſubducendam. Ubi patet dictum ſignum ſemper

eſſe referendum ad ſequentem literam, hoc eſt, quæ ex priori eſt ſubtrahenda.

Eodem modo, ſublatis $4d$ ex $3c$, reliquum erit $3c-4d$.

Exempla ſubtractionis ſimplicium.

Ex	$5a$.	$3b$.	$4d$.	a.	Ex	a.	$3c$.	a.	$2c$.
ſubtr.	$2a$.	$2b$.	d.	a.	ſubtr.	b.	$4d$.	$4b$.	d.
reliq.	$3a$.	b.	$3d$.	o.	reliq.	$a-b$.	$3c-4d$.	$a-4b$.	$2c-d$.

Unde notandum, in ejuſmodi quantitatum ſubtractione, oportere quantitatem illam, quæ ex aliâ ſubtrahi debet, eſſe minorem: hoc eſt, ad ſubtrahendum b ex a, (ut in ſuperiori exemplo) opus eſſe ut b ſit minor quàm a. Quòd ſi autem non proponatur aut conſtet, utra quantitas ſit major, aut minor, & tamen ſubductio fieri debeat; differentia earum denotari poterit hoc modo: $a = b$, hoc eſt, $a - b$ vel $b - a$.

De Multiplicatione quantitatum ſimplicium.

PORrò ad multiplicandum lineam a per b, ſcribo ab vel ba. Sic & ad multiplicandum a per a, hoc eſt, a in ſe, ſcribo aa ſeu a^2: & aaa ſeu a^3 ad prædictum productum aa adhuc ſemel multiplicandum per a. Adeò ut literæ immediatè ſeſe conſequentes, multiplicationem earum per invicem factam, vel adhuc faciendam eſſe, indicent. Non ſecus, ſi multiplicare velim, a, b & c per invicem, ſcribo abc, vel bac, vel cba &c: & abb ſeu ab^2 vel b^2a, ad multiplicandum a, b & b. Hic enim, ut in additione, non refert quo ordine ſcribantur.

Quemadmodum verò ex ductu alicujus numeri in ſe, id quod producitur vocatur Quadratum ejuſdem numeri, & ſi productum illud adhuc ſemel per eundem numerum multiplicetur, productus numerus appellatur ipſius Cubus, atque ita deinceps; ita quoque ſi a multiplicetur per a, productum aa ſeu a^2 appellari conſuevit a quadratum, ſeu a duarum dimenſionum; & ſi aa rurſus multiplicetur per a, producetur aaa ſeu a^3, quod ideo appellari poterit a cubus, ſeu a trium dimenſionum: atque ita a^4, a^5, a^6 &c. dici poterunt a quadrato-quadratum, a ſurdeſolidum, a quadrato-cubus &c. ſeu, a habens 4, 5, aut 6 &c. dimenſiones.

Sicuti

Sicuti autem numerus aliquis ſi in ſe ducatur, dicitur radix quadrata iſtius producti ſeu quadrati: & ſi adhuc ſemel per hoc productum multiplicetur, tum radix Cubica hujus poſterioris producti appellatur, &c; ſic & a dicitur radix Quadrata ex aa ſeu a^2, & radix Cubica ex a^3, & radix Quadrato-Quadrata ex a^4, & radix Surſolida ex a^5, & radix Quadrato-Cubica ex a^6, atque ita porrò. Idem de reliquis eſt intelligendum.

Ex quibus conſtat diligenter eſſe notandum, quòd magnum ſit diſcrimen inter aliquam quantitatem, cui numerus aliquis præfixus eſt, & inter eandem quantitatem, ubi idem numerus à tergo eſt adſcriptus. Ut inter $2a$ & a^2, $3a$ & a^3, $4a$ & a^4, &c. ſiquidem per $2a$, $3a$, $4a$, &c. ſimpliciter intelligitur quantitas a bis, ter, quater &c. ſumpta, hoc eſt, a ſibi ipſi toties addita: at verò per a^2, a^3, a^4 &c. Quadratum, Cubus, Quadrato-Quadratum &c. ipſius a, hoc eſt, ipſa quantitas a toties poſita & multiplicata.

Exempla multiplicationis ſimplicium.

Multipl.	a.	a	aa	ab	ab	ab	aa	a^3.
per	b.	a	a	c	b	cd	ab	a^3.
productum	ab.	aa.	a^3.	abc.	abb.	$abcd$.	a^3b.	a^6.

Ubi notandum in a^3b, producto multiplicationis quantitatum aa & ab, numerum ternarium quantitatem præcedentem a reſpicere, non autem ſequentem b: quod, cum brevitatis cauſâ ſcribatur pro $aaab$, in omnibus ſimilibus caſibus quoque eſt intelligendum. Eâdem ratione, ad multiplicandum a^3, hoc eſt, aaa per a^3 ſeu aaa, producetur a^5, hoc eſt, $aaaaaa$.

Quòd ſi quantitates occurrant multiplicandæ, quibꝰ numeri, ſive integri ſive fracti, pręfiguntur, oportebit dictos numeros in ſe invicem ducere, ut in vulgari Arithmeticâ, & eorum productum præfigere producto, quod exſurgit ex multiplicatione quantitatum dictarum. Ut ad multiplicandum $2a$ per $3b$; multiplicatis 2 per 3, provenit 6, quod ſi præfigatur ipſi ab, producto quantitatum a & b per invicem, erit quæſitum productum $6ab$. Similiter multiplicatis $2b$ per c, productum erit $2bc$. nam unitas, quæ hîc ipſi c præfigi ſubintelligitur, ducta in 2, producit 2.

Nec aliter fit, ſi ad multiplicandum $3ab$, hoc eſt, ter ab per $2cd$, hoc eſt, bis cd, ſcribatur $6abcd$. Sic &, multiplicatis $\frac{1}{2}aa$ per $\frac{1}{3}ab$, hoc eſt, ſemiſſe ipſius aa per tertiam partem ipſius ab, productum fiet $\frac{1}{6}a^3b$, hoc eſt, $\frac{1}{6}aaab$.

Exempla multiplicationis.

Multipl.	$2a$	$2b$	$\frac{3}{2}a$	$3ab$	$\frac{1}{2}aa$	a^3	$6a^3$.
per	$3b$	c	$\frac{1}{2}d$	$2cd$	$\frac{1}{3}ab$	$3b^3$	$\frac{2}{3}a^3$.
product.	$6ab$.	$2bc$.	$\frac{3}{4}ad$.	$6abcd$.	$\frac{1}{6}a^3b$.	$3a^3b^3$.	$4a^6$.

Ubi tandem ſciendum, quòd licet ex multiplicatione producantur quantitates plurium dimenſionum ſeu literarum; earum tamen additionem atque ſubtractionem non aliter fieri atque præcedentium. Ut ad addendum $2ab$ ad $3ab$, ſcribitur $5ab$: & ad addendum $6ab$ ad $2bc$, ſcribitur $6ab+2bc$. Non ſecus, ad ſubtrahendum $2ab$ de $3ab$, ſcribitur ab: & ad ſubtrahendum $2bc$ de $6ab$, ſcribitur $6ab-2bc$. Et ſic de aliis.

De Diviſione quantitatum ſimplicium.

QUoniam verò diviſio reſolvit id, quod multiplicatio componit: facilè apparet, ad dividendam quantitatem ab ſeu ba per a, opus tantùm eſſe ex quantitate dividendâ ab tollere quantitatem a, quæ diviſor eſt, & pro quotiente ſcribere reliquam quantitatem b. Eodem modo, ſi dividatur aa per a, orietur a; & aaa ſeu a^3 per a, orietur aa. Non ſecus diviſâ abc per a, fiet bc: at per b, fiet ac: & per c, fiet ab.

Quòd ſi verò quantitates dividendæ occurrant, quibus numeri ſint præfixi; oportet, factâ diviſione quantitatum, ut jam oſtenſum eſt, ſimiliter dictos numeros dividere, ut in Arithmeticâ vulgari, & quod oritur quotienti quantitatum inventæ præfigere.

Exempla diviſionis ſimplicium.

Divid.	ab		aa	a^3	abc	abc	a^3b	a^5.
per	a		a	a	a	ab	ab	aa
quot.	b		a.	aa.	bc.	c.	aa.	a^3.

Divid.	$6ab$	$\frac{1}{6}a^3b$	$3a^3b^3$	$3a^3b^3$
per	$2a$	$\frac{1}{3}ab$	$3b^3$	a^3
quot.	$3b$.	$\frac{1}{2}aa$.	$1a^3$ ſeu a^3.	$3b^3$.

Cùm

Cùm autem occurrunt quantitates dividendæ, ex quibus literæ diviſoris præcedenti modo tolli nequeunt; ſubſcribitur Diviſor ipſi Dividendo interjectâ lineolâ, ad modum fractionis Arithmeticæ vulgaris. Ut ad dividendum *ab* per *c*, ſcribo $\frac{ab}{c}$, quo indicatur *ab* eſſe diviſam per *c*, vel adhuc eſſe dividendam. Sic & ad dividendum *a* per *b*, ſcribitur $\frac{a}{b}$. ſimiliter diviſâ *abc* per *de*, quotiens erit $\frac{abc}{de}$. & ſic de aliis. Quæ quidem quantitates ſic diviſæ appellantur Fractiones.

Eſt verò hîc obiter notandum, diviſis *a* per *a*, 2*b* per 2*b*, ſimilibùſve, quotientem eſſe 1: ſiquidem quævis quantitas ſe ipſam ſemel continet, ideoque per ſeipſam diviſa unitatem profert.

DE LOGISTICA QUANTITATUM COMPOSITARUM.

EXplicatâ Simplicium quantitatum operatione, quoniam ex illarum additione & ſubtractione oriuntur quantitates, per ſignum + compoſitæ, aut per ſignum — disjunctæ, (quæ communiter generali nomine Compoſitæ dicuntur; conſequens eſt, ut harum quoque operationem deinceps oſtendamus.

De Additione quantitatum compoſitarum.

IGitur ad addendum quantitates Compoſitas, iiſdem literis notatas, oportet conſiderare ſigna + & —, quibus afficiuntur, & notare, ſi eadem fuerint, additionem fieri ut in ſimplicibus, & earum ſummæ præfigi idem ſignum. Ut ad addendum $a + 3b$ ad $a + 2b$: additis *a* ad *a*, & 3*b* ad 2*b*, ſumma erit $2a + 5b$. Eodem modo $2a - b$ additum ad $3a - 3b$, facit ſummam $5a - 4b$.

Quòd ſi verò ſigna diverſa fuerint, ſubtrahendæ erunt quantitates eiſdem literis denotatæ, ſicut in ſubtractione ſimplicium, & ei quod relinquitur præfigendum eſt ſignum, quo major quantitas afficitur. Ut ſi addendum ſit $3b + 5a$ ad $2b - 2a$: additis 3*b* ad 2*b*, & ſubtractis 2*a* ex 5*a*, ſumma erit $5b + 3a$. Similiter ſi $a + d$ addatur ad $a - 4d$, fiet ſumma $2a - 3d$. Ubi patet ſi $2b + a$ addatur ad $3b - a$, ſummam fore 5*b*: quantitates enim $+ a$ & $- a$, cum propter diverſa ſigna ſint ſubtrahendæ, ſe mutuò tollunt.

Jam ad addendum quantitates diverſis literis denotatas, oportet tantùm eas ſuis ſignis connectere. Ut ad addendum $a + b$ ad $c - d$, ſcribo $a + b + c - d$: ſiquidem quantitas c, & omnis alia cui nullum præponitur ſignum, intelligitur ſibi præfixum habere ſignum $+$.

Exempla additionis compoſitarum.

Add.	$a + 3b$	$2a - b$	$\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}bb$	$a^3 - \frac{1}{4}abc$	$aa + 2a - 3$.
	$a + 2b$	$3a - 3b$	$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3 - \frac{3}{4}abc$	$aa + a - 6$.
ſumma	$2a + 5b$.	$5a - 4b$.	$ab + bb$.	$\frac{5}{3}a^3 - 2abc$.	$2aa + 3a - 9$.

Add.	$3b + 5a$	$a + d$	$2b + a$	$aa - 2ab$	$3a^3 - \frac{1}{3}aab$	$aa - 5a + 6$.
	$2b - 2a$	$a - 4d$	$3b - a$	$aa + ab$	$2a^3 + \frac{1}{2}aab$	$aa + a - 6$.
aggreg.	$5b + 3a$.	$2a - 3d$.	$5b$.	$2aa - ab$.	$5a^3 + \frac{1}{6}aab$.	$2aa - 4a$.

Add.	$a + b$	$2aa + 3ab - bb$	$3abc$	$a^3 + 2abb - aab + abc$.
Summa	$c - d$	$5ab - 3aa$	$a^3 - abc$	$a^3 + aab - 3abb - b^3$.
ſeu aggr.	$a + b + c - d$.	$8ab - aa - bb$.	$a^3 + 2abc$.	$2a^3 - abb + abc - b^3$.

E quibus manifeſtum fit, (cum ad addendum $3b + 5a$ ad $2b - 2a$, ſcribi poſſit $3b + 5a + 2b - 2a$, hoc eſt, $5b + 3a$: ſiquidem $+ 3b$ & $+ 2b$ faciunt $5b$, & $+ 5a - 2a$ faciunt $+ 3a$) quantitates eiſdem literis denotatas, quando diverſa habent ſigna, ſubtrahendas eſſe, & ſummæ aſcribendum eſſe ſignum majoris quantitatis.

De Subtractione quantitatum compoſitarum.

POrrò ad ſubtrahendum quantitates compoſitas, quæ eiſdem literis ſunt denotatæ, ſciendum eſt: ſi ſigna eadem fuerint, & quantitas è qua ſubtractio fieri debet, major ſit quantitate ſubducendâ; tum ſubtractionem fieri ut in ſimplicibus, & ei quod relinquitur præfigendum eſſe idem ſignum. Ut ſi ſubtrahatur $a + 2b$ ex $2a + 5b$: (ſubtractis a ex $2a$, & $2b$ ex $5b$,) remanet $a + 3b$. Non ſecus ſi ſubtrahatur $3a - 3b$ ex $5a - 4b$, reliquum erit $2a - b$.

Si verò ſigna eadem fuerint, & quantitas à quâ ſubtractio fieri debet quantitate ſubducendâ minor ſit; oportet, ſubtractâ minore ex majore, reſiduo ſignum contrarium præponere. Ut ſi ſubtrahendum ſit $a + 3b$ ab $3a + 2b$: ſubtractis a ex $3a$, & $2b$ ex $3b$, reſiduum

duum erit $2a-b$. Similiter, ſublatis $a-3b$ ex $2a-b$, relinquitur $a+2b$.

Quòd ſi quantitates iiſdem literis deſignatæ, atque ad ſubtrahendum propoſitæ, diverſa ſigna habeant; erunt ipſæ addendæ, ut in ſimplicibus, & ſummæ præfigendum ſignum quantitatis, à quâ ſubductio fieri debet. Ut ſi velimus ſubtrahere $a-b$ ex $2a+b$: ſubtractis a ex $2a$, additiſque b ad b, reſiduum erit $a+2b$. Eodem modo, $2a+5d$ ſubductum à $3a-2d$, relinquet $a-7d$.

Cæterum ad ſubtrahendum quantitates diverſis literis denotatas, oportet quantitates ſubducendas, variatis ſignis, connectere cum iis, à quibus ſubductio fieri debet. Ut ſi ſubtrahi debeat $c-d$ ab $a+b$; erit differentia ſeu reſiduum $a+b-c+d$: variatis nempe ſignis quantitatum c & d.

Exempla ſubtractionis compoſitarum.

Ex	$2a+5b$	$5a-4b$	$\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}bb$	$a^3-\frac{5}{4}abc+abb-b^3$	$2aa+3a-9$.
Subtr.	$a+2b$	$3a-3b$	$\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{4}abc+abb-b^3$	$aa+2a-3$.
Reliq.	$a+3b$.	$2a-b$.	$\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb$.	$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}abc$.	$aa+a-6$.

Ex	$3a+2b$	$2a-b$	$2aa-ab$	$5a^3+\frac{1}{6}aab-\frac{2}{3}abb$	$3aa-2a+6$.
Subtr.	$a+3b$	$a-3b$	$aa-2ab$	$2a^3+\frac{1}{2}aab-abb$	$2aa-3a+9$.
Reſid.	$2a-b$.	$a+2b$.	$aa+ab$.	$3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{1}{3}abb$.	$aa+a-3$.

Ex	$2a+b$	$3a-2d$	$8ab-aa$	$3a^3-\frac{1}{2}aab+\frac{2}{3}abb-b^3$	$3aa-2a+6$.
Subtr.	$a-b$	$2a+5d$	$2aa-3ab$	$-2a^3+\frac{2}{3}aab$	$aa+a-3$.
Differ.	$a+2b$.	$a-,d$.	$11ab-3aa$.	$5a^3-aab+\frac{2}{3}abb-b^3$.	$2aa-3a+9$.

Ex	$a+b$	$2aa-4a$	$3abc$	$a^3+aab-abb-b^3$.
Subtr.	$c-d$	$aa+a-6$	a^3-abc	$aab-{}^2a^3+c^3-abb$.
Rel. reſid. ſeu diff.	$a+b-c+d$.	$aa-5a+6$.	$4abc-a^3$.	$3a^3-b^3-c^3$.

E quibus perſpicuum fit (cùm ad ſubtrahendum $a+3b$ ex $3a+2b$ ſcribi poſſit $3a+2b-a-3b$, hoc eſt, $2a-b$, ſubtractis nempe a ex $3a$ & $2b$ ex $3b$): quantitates eiſdem literis denotatas, quando eadem habent ſigna, ſed quantitates ſubducendæ aliis ſunt majores, ſubtrahendas eſſe, & relicto præponendum eſſe ſignum contrarium.

Similiter, quoniam ad ſubtrahendum $a-b$ ex $2a+b$ ſcribere poſſum $2a+b-a+b$, hoc eſt, $a+2b$, (ſubtrahendo videlicet a à $2a$, & addendo b ad b) patet, quâ ratione, quantitates eiſdem literis deſignatæ, cùm diverſa habuerint ſigna, ſint addendæ, & ſummæ præfigendum ſit ſignum ejus, à quâ ſubtractio fieri debet. Quòd autem ſubtrahendo $a-b$ ex $2a+b$, ſcribendum ſit $2a+b-a+b$, variatis nempe ſignis quantitatum ſubducendarum, inde manifeſtum fit; quòd ad ſubtrahendum a ex $2a+b$ differentia denotetur per $2a+b-a$, utpote ſubducendo quantitatem a, præponendo ei ſignum —, ut in ſubtractione ſimplicium eſt dictum: at quoniam ſubducendo quantitatem a ex $2a+b$, plus juſto tollitur, ſiquidem non a abſolutè tollendum proponitur, ſed diminuta quantitate b; hinc fit, ut $2a+b-a$ minor ſit quàm juſta differentia, quantitate b: adeoque ad veram differentiam obtinendam, oportet addere quantitatem b, & ſcribere $2a+b-a+b$, hoc eſt, $a+2b$. Et ſic de aliis.

De Multiplicatione quantitatum compoſitarum.

POſt hæc, ad multiplicandum quantitates compoſitas, operatio inſtitui poteſt ad modum Arithmeticæ vulgaris: oportet enim earum partes multiplicare in ſe invicem, ut in ſimplicibus eſt oſtenſum, atque producta ſimul addere. Quod autem ad ſigna + & — attinet iiſdem præfigenda, ſciendum eſt: eadem ſigna (hoc eſt + per +, vel — per —) facere ſignum +, diverſa verò (hoc eſt + per —, vel — per +) facere —. Ut ad multiplicandum $a+b$ per c: multiplicatis $+a$ per $+c$, & $+b$ per $+c$, fiunt $+ac$, & $+bc$: quibus additis, fit productum $+ac+bc$, ſeu $ac+bc$. Sic ſi multiplicandum ſit $a-b$ per c, producetur $ac-bc$.

Nec aliter fit, ſi ad multiplicandum proponatur $a+b$ per $c+d$: multiplicatis enim $a+b$ per c, ut ante; & rurſus $a+b$ per d (ſiquidem $a+b$ non tantùm per c, ſed etiam per d multiplicari debet): fiet $ac+bc+ad+bd$. Non ſecus ad multiplicandum $a-b$ per $c-d$ ſcribitur $ac-ad-bc+bd$: multiplicatis nempe primum $a-b$ per $+c$, fit $+ac-bc$: deinde $a-b$ per $-d$, fit $-ad+bd$. quippe $+a$ per $-d$, producit $-ad$: at $-b$ per $-d$ producit $+bd$, juxta regulam. Et ſic de aliis. Nec refert utrùm à dextrâ an verò à ſiniſtrâ

ſtrâ initium fiat, ſicut ſequentibus exemplis manifeſtum fiet.

Exempla multiplicationis compoſitarum.

Mult. $a+b$ $\quad a-b$ $\quad a+b$ $\quad a-b$ $\quad a+b$

per c $\quad c$ $\quad c+d$ $\quad c-d$ $\quad a+b$

prod. $ac+bc.$ $\quad ac-cb.$ $\quad ac+bc$ $\quad ac-bc$ $\quad +ab+bb$

$+ad+bd$ $\quad -ad+bd$ $\quad aa+ab$

product. $ac+bc+ad+bd.$ $\quad ac-bc-ad+bd.$ $\quad aa+{}^{2}ab+bb.$

Multipl. $a-b$ $\quad a+b$ $\quad aa-2ab+bb$ $\quad aa-ab+bb$

per $a-b$ $\quad a-b$ $\quad a-b$ $\quad a+b$

$-ab+bb$ $\quad aa+ab$ $\quad -aab+2abb-b^3$ $\quad +aab-abb+b^3$

$aa-ab$ $\quad -ab-bb$ $\quad a^3-2aab+abb$ $\quad a^3-aab+abb$

prod. $aa-2ab+bb.$ $\quad aa-bb.$ $\quad a^3-3aab+3abb-b^3.$ $\quad a^3+b^3.$

Mult. $3dd+4de+ee$ $\qquad 2a^3+\frac{1}{2}aab+\frac{2}{3}abb$

per $3dd-ee$ $\qquad \frac{2}{3}ab-\frac{1}{2}aa$

$9d^4+12d^3e+3ddee$ $\qquad -a^5-\frac{1}{4}a^4b-\frac{1}{3}a^3bb$

$-3ddee-4de^3-e^4$ $\qquad +\frac{4}{3}a^4b+\frac{1}{3}a^3bb+\frac{4}{9}aab^3$

product. $9d^4+12d^3e-4de^3-e^4.$ $\qquad \frac{13}{12}a^4b+\frac{4}{9}aab^3-a^5.$

Multipl. $4a^3+3aa-2a+1$

per $aa-5a+6$

$+24a^3+18aa-12a+6$

$-20a^4-15a^3+10aa-5a$

$+4a^5+3a^4-2a^3+1aa$

product. $4a^5-17a^4+7a^3+29aa-17a+6.$

Cæterum advertendum hîc eſt, non rarò utile eſſe, multiplicationem hoc modo non inſtituere, ſed tantummodò eam innuere interſerendo voculam *in* vel M. Ut ad multiplicandum $4a^3+3aa-2a+1$ per $aa-5a+6$, ſcribo $\overline{4a^3+3aa-2a+1}$ in $\overline{aa-5a+6}$, vel $\overline{4a^3+3aa-2a+1}$ M $\overline{aa-5a+6}$.

Quòd autem $+$ per $-$, vel $-$ per $+$ faciat $-$, ſic patet. Eſto $a-b$ multiplicandum per c, & ſit $a-b \infty e$: hinc ſi utrobique addatur

tur b, fiet $a \propto b + c$. Jam quoniam æquales quantitates per eandem quantitatem multiplicatæ producunt æquales; ideo ſi utrinque multiplicetur per c, erit $ac \propto bc + cc$, hoc eſt, auferendo utrinque bc, erit $ac - bc \propto cc$. Quocirca cum ſtatuatur $a - b \propto c$, & utrâque parte ductâ in c, producatur $ac - bc \propto cc$; perſpicuum fit, $-b$ ductum in $+c$, producere $-bc$.

Nec aliter oſtendetur − per − multiplicatum producere +. Etenim ſi $a - b$ multiplicandū ſit per $c - d$: ponendo, ut ante, $a - b \propto c$, erit productum ex $a - b$ in $c - d$ æquale producto ex c in $c - d$ vel $c - d$ in c: id eſt, $cc - dc$. Sed cc, ut ſupra, æquatur $ac - bc$: unde $ac - bc - dc$ æquabitur producto ex $a - b$ in $c - d$. Porrò cum $a - b$ æqualis ſit poſita ipſi c, & utrâque parte ductâ in d, productum $ad - bd$ æquetur producto dc: hinc ſi ex $ac - bc$ ſubtrahatur $ad - bd$ loco dc, ei æquale; erit juxta regulam ſubtractionis $ac - bc - ad + bd$ productum quæſitum. E quibus liquet $-b$ multiplicatum per $-d$ producere $+bd$.

De Diviſione quantitatum compoſitarum.

PRæterea, ad dividendum quantitates compoſitas, operatio non abſimilis erit ei, quâ in Arithmeticâ vulgari duo integri numeri per ſe invicem dividuntur. Quod autem ſigna + & − concernit, ſciendum eſt, ſi dividatur + per +, aut − per −, ſemper oriri +; at ſi + per −, vel − per + dividatur, ſemper oriri −. omnino ut in multiplicatione. Operationem autem ſive à dextrâ, ſive à ſiniſtrâ incipias perinde erit. Ut ad dividendum $ac + bc$ per c: diviſis $+ac$ per $+c$, & $+bc$ per $+c$, fiunt ut in ſimplicibus eſt oſtenſum $+a$ & $+b$, unde quotiens quæſitus erit $a + b$. Similiter ſi dividatur $ac - cb$ per c, orietur $a - b$: etenim diviſis $+ac$ per $+c$, fit $+a$, & $-cb$ per $+c$, fit $-b$. Non diſſimili ratione dividitur $ac + ad + bc + bd$ per $c + d$, & fit $a + b$. Cujus operatio talis eſt.

Divid.	$ac + ad + bc + bd$	$+ac \mid +a.$	$+bc \mid +b.$
per $c + d$)	$ac + ad + bc + bd$	$+c$	$+c$
	0 0 0 0		
Quotiens	$+a + b.$		

Diviſo

Diviſo ac per c, (ut in ſimplicibus) fit a, ſcribendum ſub lineâ in quotiente. hinc multiplicato diviſore $c+d$ per quotientem inventum a, productum $ac+ad$, ex dividendo auferatur, ſcribendo partes ejuſdem denominationis ſub invicem, & reliquum ſub lineâ infra ductâ. Unde cum ſubducto ac ex ac, & ad ex ad manet nihil, ſcribitur ſub lineâ ductâ o. Deinde diviſo $+bc$ per $+c$, fit $+b$, adſcribendum priori quotienti. unde multiplicato diviſore $c+d$ per hunc quotientem b, fit productum $+bc+bd$. id quod ſi ſcribatur, ut ante, ſub dividendo, & fiat ſubductio; erit pro reliquo ſub lineâ ſcribendum o. Et peracta erit diviſio.

Eodem modo ad dividendum $ac-ad-bc+bd$

per $c-d$:) $ac-ad-bc+bd$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Erit quotiens $+a-b$.

$$\begin{array}{c|c} +ac & +a \\ +c & \\ -bc & -b \\ +c & \end{array}$$

Divido primùm ac per c, & fit a, ſcribendum ſub lineâ in quotiente. Jam multiplicato diviſore $c-d$ per $+a$, fit productum $ac-ad$, ſubducendum ex dividendo, & relinquitur o. Deinde divido $-bc$ per $+c$, & oritur $-b$, ſub lineâ ſcribendum in quotiente. Quoniam autem multiplicato diviſore $c-d$ per $-b$, fit productum $-bc+bd$, & eo ex reliquo dividendi ablato, remanet nihil; patet diviſionem eſſe ad finem perductam, & quotientem eſſe $a-b$.

Sic etiam ad dividendum $aa-2ab+bb$

per $a-b$:) $aa-ab$

$0-ab$

$-ab+bb$

$0 \quad 0$

fit quotiens $a-b$.

$$\begin{array}{c|c} aa & a \\ a & \\ -ab & -b \\ +a & \end{array}$$

Divido primùm aa per a, & oritur a, ſcribendum ſub lineâ in quotiente. Unde multiplicato diviſore $a-b$ per a, & ablato producto $aa-ab$ ex dividendo, ſcribendum erit reliquum $-ab$ ſub lineâ ductâ infra $-2ab$. Deinde divido $-ab$ per $+a$, & fit $-b$, ſcribendum ſub lineâ in quotiente. Tum ducto diviſore $a-b$ in $-b$, fit produ-

ctum $-ab+bb$, quod ſublatum à reliquo dividendi, relinquit o. Et erit operatio finita, ac quotiens quæſitus $a-b$.

Eadem ratione ſi dividendum ſit $aa-bb$ per $a+b$.

Divid.	$aa-bb$	$-ab$	aa	a
Diviſ. $a+b$)	$aa-bb$	$-ab$	a	
	0 0	0	$-ab$	$-b$.
Quotiens	$a-b$		$+a$	

Incipiendo rurſus à primo termino, divido aa per a, & habebitur a, ſcribendum ſub lineâ in quotiente. Unde multiplicato diviſore $a+b$ per quotientem inventum a, producetur $aa+ab$, quod ſublatum ex dividendo relinquet $-ab$: & quoniam hic terminus præter ſuperſtitem $-bb$ ad dividendum huc acceſſit, ideo poſt lineam ei adſcribitur. Deinde divido $-ab$ (nempe id quod modò ad dividendum acceſſit) per $+a$, & habetur $-b$ in quotiente ſub lineâ ſcribendum. Quo facto, ſi multiplicetur diviſor $a+b$ per hunc quotientem $-b$, exſurget $-ab-bb$ ad ſubtrahendum ex eo, quod relinquitur in dividendo: quod cum poſt ſubtractionem relinquat o; liquet abſolutam eſſe operationem, & quotientem fore $a-b$.

Nec aliter ſe res habet ſi dividatur a^3+b^3 per $a+b$, & incipiatur ab ultimo termino.

					b^3	bb
Dividend.	$a^3 \quad +b^3$	$-abb$	$+aab$		b	
Diviſor $a+b$)	$+a^3 \quad +b^3$	$-abb$	$+aab$		$-abb$	$-ab$
	0 0	0	0		$+b$	
Quotiens	$+aa-ab+bb.$				$+aab$	$+aa$
					$+b$	

Etenim diviſó $+b^3$ per $+b$, fit $+bb$, ſcribendum in quotiente. tum ducto diviſore $a+b$ in $+bb$, producitur $+abb+b^3$: Id quod ſi ſubtrahatur ex dividendo, relinquetur $-abb$. Deinde diviſo $-abb$ per $+b$, oritur $-ab$, ſcribendum in quotiente, quo multiplicato per diviſorem $a+b$ exſurgit $-aab-abb$, ad ſubtrahendum ex reliquo dividendi, eritque reſiduum $+aab$. Denique diviſo $+aab$ per $+b$, prodibit $+aa$ ſcribendum in quotiente. unde ſi multiplicetur diviſor $a+b$ per $+aa$, & productum $+a^3+aab$ auferatur ex reſiduo dividendi, erit reliquum o. Id quod oſtendit, diviſo a^3

ſo a^3+b^3 per $a+b$, oriri $aa-ab+bb$, quod erat faciendum.

Sequuntur adhuc nonnulla exempla ad uberiorem exercitationem diviſionis compoſitarum.

Dividend.	$a^3-3aab+3abb-b^3$	$-b^3 \mid +bb$
Diviſor $a-b.$)	$+abb-b^3$	$-b \mid$
	$+2abb \quad 0$	$+2abb \mid -2ab$
	$-2aab+2abb$	$-b \mid$
	$-aab \quad 0$	$-aab \mid +aa$
	a^3-aab	$-b \mid$
	$0 \quad 0$	
Quotiens	$+aa-2ab+bb.$	

Dividend.	$9d^4+12d^3e-4de^3-e^4 \mid -3ddee$	$-e^4 \mid +ee$
Diviſ. $3dd-ee$)	$9d^4+12d^3e-4de^3-e^4 \mid -3ddee$	$-ee \mid$
	$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$	$-3ddee \mid +3dd.$
		$-ee \mid$
Quotiens	$+4de+3dd+ee$	$-4de^3 \mid +4de.$
		$-ee \mid$

Dividend.	$\frac{13}{12}a^4b+\frac{4}{9}aab^3-a^5 \mid -\frac{1}{3}a^3bb$	$-a^5 \mid +2a^3.$
Diviſ. $\frac{2}{3}ab-\frac{1}{2}aa$)	$+\frac{4}{3}a^4b+\frac{4}{9}aab^3-a^5 \mid -\frac{1}{3}a^3bb$	$-\frac{1}{2}aa \mid$
	$-\frac{1}{4}a^4b \quad 0 \quad 0 \quad 0$	$-\frac{1}{4}a^4b \mid +\frac{1}{2}aab.$
	$-\frac{1}{4}a^4b$	$-\frac{1}{2}aa \mid$
	$0.$	$-\frac{1}{3}a^3bb \mid +\frac{2}{3}abb$
Quotiens	$+\frac{2}{3}abb+\frac{1}{2}aab+2a^3.$	$-\frac{1}{2}aa \mid$

Pag. 291. an. 7. Divid. $d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb \mid -bd^3 \mid +bbdd \mid -b^3d \mid -aabd$

Div. $d+b)\ d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb \mid -bd^3 \mid +bbdd \mid -b^3d \mid -aabd$

$0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0$

Quotiens $+d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab.$

$\frac{d^4}{d} \mid d^3.\ \ \frac{-bd^3}{+d} \mid -bdd.\ \ \frac{+bbdd}{+d} \mid +bbd.\ \ \frac{-b^3d}{+d} \mid -b^3.$

$\frac{+2aady}{+d} \mid +2aay.\ \ \frac{+aadd}{+d} \mid +aad.\ \ \frac{-aabd}{+d} \mid aab.$

Dividend. $+y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \qquad \frac{-64}{-16} \mid +4.$

Pag. 87. Diviſor $yy-16)\ +y^6 + 8y^4 + 4yy - 64$

$0 - 16y^4 - 128yy\ \ 0 \qquad \frac{-128yy}{-16} \mid +8yy.$

$-16y^4 - 128yy$

$0\ \ 0 \qquad \frac{-16y^4}{-16} \mid +1y^4.$

Quotiens $+1y^4 + 8yy + 4.$

Dividend. $+y^6 + aay^4 - 2ccy^4 - a^4yy + c^4yy - a^6 - 2a^4cc - aac^4 \mid +2aaccyy$

Pag. 88. Diviſ. $yy-aa-cc)\ +y^6 - aay^4 - ccy^4 - 2a^4yy + c^4yy - a^6 - a^4cc - aac^4 \mid + aaccyy$

$0 + 2aay^4 - ccy^4 + a^4yy\ \ 0\ \ 0 - a^4cc\ \ 0 \quad + aaccyy$

$+2aay^4 - ccy^4 + a^4yy \qquad -a^4cc \qquad +aaccyy$

$0\ \ 0\ \ 0 \qquad 0 \qquad 0$

Quotiens $+y^4 + 2aayy - ccyy + a^4 + aacc.$

$\frac{+y^6}{+yy} \mid +y^4.\ \ \frac{+2aay^4}{+yy} \mid +2aayy.\ \ \frac{-ccy^4}{+yy} \mid -ccyy.$

$\frac{+a^4yy}{+yy} \mid +a^4.\ \ \frac{+aaccyy}{+yy} \mid +aacc.$

Divid.

Dividend. $+\frac{1}{4}q-\frac{1}{4}ſq+ſ^3uuq-ſuuq-4ſ^4u^4q+4ſ^3u^4q \mid +ſſuuq$

Div. $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}ſ-ſſuu+ſ^3uu)\ \frac{1}{4}q-\frac{1}{4}ſq+ſ^3uuq-ſuuq-4ſ^4u^4q+4ſ^3u^4q \mid +ſſuuq$ Pag. 313. lin. 1.

o o o o o o o

Quotiens $+q-4ſuuq$.

$\dfrac{+\frac{1}{4}q}{+\frac{1}{4}} \Big| +q. \qquad \dfrac{-ſuuq}{+\frac{1}{4}} \Big| -4ſuuq.$

Quòd ſi quantitates dividendæ occurrant, quæ præcedenti modo dividi nequeunt, ſubſcribendus erit diviſor ipſi dividendo, interjectâ lineolâ, ſicut in fractionibus vulgaribus. Ut ad dividendum $ad-ae$ per $d+e$, ſcribo pro quotiente $\frac{ad-ae}{d+e}$. quo indicatur $ad-ae$ diviſum eſſe per $d+e$, vel adhuc eſſe dividendum. Sic & ſi $bb+bd+cc$ dividatur per $b+d$, ſit quotiens, ſeu fractio $\frac{bb+bd+cc}{b+d}$, hoc eſt, $b+\frac{cc}{b+d}$. Quippe ſæpe conducit, ut in Arithmeticâ vulgari, diviſionem, quantùm fieri poteſt, inſtituere, & quod ſupereſt inſtar fractionis quotienti adſcribere. Et tantum de diviſione.

De extractione radicis.

QUoniam autem de Radicis Extractione, quæ pro diviſionis ſpecie haberi poteſt, agendum reſtat, ſciendum eſt, ejus operationem non eſſe diverſam ab illâ, quâ in Arithmeticâ vulgari radix ex dato aliquo numero elicitur.

Etenim ut a multiplicatum per a facit aa, ſeu a quadratum, cujus radix ſeu latus dicitur a; ſic & radice quadratâ extractâ ex aa proveniet rurſus a. Similiter cum aa, hoc eſt, a quadratum multiplicatum per a producat a^3 ſeu cubum ex a; ita etiam extractâ radice cubicâ ex a^3, fiet a. Et ſic de cæteris radicibus.

Nec aliter fit ſi ex quantitatibus compoſitis radix ſit extrahenda. Sicut enim ex quantitatibus ſimplicibus radicis extractio non ſecus ſe habet atque extractio radicis ex aliquo numero, quæ tantùm unius ſit characteris: ita radix, quantitas exiſtens compoſita, non aliter extrahetur, ac ſi ex aliquo numero radix, quæ pluribus conſtet characteribus, eliceretur.

Ut ad extrahendam radicem quadratam ex $aa + 2ab + bb$: extraho primùm radicem ex aa, & fit a, quæ in ſe multiplicata & ab aa ablata, relinquit 0. Deinde multiplicato a per 2, divido $+ 2ab$

Quadratum $aa + 2ab + bb$
$aa + 2ab + bb$
0 0 0
Radix $a + b$
Diuiſor $2a$

per $2a$, & fit $+ b$: quod adſcribo priori radici inventæ a. Hinc ſi ducatur $2a$ in b, fit $+ 2ab$, quod ſublatum ex $2ab$, relinquit 0. Similiter ſi multiplicetur b in ſe, fiet $+ bb$; quâ itidem ex $+ bb$ ablatâ, remanebit 0. Et operatio erit ad finem perducta, eritque radix quæſita $a + b$. Et ſic de aliis.

Exempla extractionis radicum ex compoſitis.

Quadratum $a^4 - 2aabb + b^4$
Radix $aa - bb$
Diviſor $2aa$

Quadratum $64xx - 160x + 100$
Radix $8x - 10$
Diviſor $16x$

Quadratum $aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$
$aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$
0 0 0 0 0 0
Radix $a + c - b$
Primus diviſor $2a$
Secundus diviſor $2a + 2c$

Qua-

Quadratum aa $a+c$

Radix a per 2

$2a+2c$. ſecundus diviſor.

a a

per 2 a $-2ab$ | $-b$ quot. ſecundus.

Primus diviſor $2a$ aa $+2a$ |

$+2ac$ | $+c$ quotus primus. $2a+2c$

$+2a$ | $-\,b$

$-2ab-2bc$.

$2a$ c $-b$

$+c$ c $-b$

$+2ac$ cc. $+bb$

Cubus $a^3+3aab+3abb+b^3$ $+3aab$ | $+b$.

Radix $a+b$ $+3aa$ |

Diviſor $3aa$

Cub. $27x^6-54x^5+171x^4-188x^3+285xx-150x+125$ Cub. $27x^6$

$27x^6-54x^5+36x^4-8x^3+60xx-150x+125$ Rad. $3xx$.

0 0 $+135x^4-180x^3+225xx$ 0 0 $3xx$

$+135x^4-180x^3+225xx$ $3xx$

0 0 0 $9x^4$.

Radix $3xx-2x+5$.   per 3

Primus diviſ. $27x^4$ $-54x^5$ | $27x^4$.I.div.

Secundus diviſor $27x^4-36x^3+12xx$. $+27x^4$ | $-2x$ quot. primus.

$-2x$ $-2x$ $3xx-2x$

$+27x^4$ $-2x$ $-2x$ $3xx-2x$

$-\,2x$ $+4xx$ $+4xx$ $-6x^3+4xx$

$-54x^5$ $+3xx$ $-2x$ $9x^4-6x^3$

$+12x^4$ $-8x^3$ $9x^4-12x^3+4xx$

per 3 per 3

$+36x^4$. $27x^4-36x^3+12xx$. Secund. div.

		$+5$	$+5$
$+135x^4$ | $+27x^4$	$+5$ quot⁹ ſecund.	$+5$	$+5$
		$+25$	$+25$
		$+3xx-2x$	$+5$
$+27x^4-36x^3+12xx$		$+75xx-50x$	$+125.$
$+\;5$		per 3	
$+135x^4-180x^3+60xx.$		$+225xx-150x.$	

Cæterum ſi quantitates ex quibus radix extrahi debet, tales fuerint ut radix prædicto modo inveniri non poſſit, deſignabitur ipſa præfigendo quantitatibus propoſitis ſignum $\sqrt{}$. Ut ad extrahendum radicem quadratam ex aq, ſcribo $\sqrt{aq}$; quo indicatur radicem quadratam ex aq eſſe extractam, vel adhuc eſſe extrahendam. Sic & $\sqrt{aa+bb}$ deſignabit radicem quadratam ex $aa+bb$.

Similiter ad extrahendum radicem cubicam ex aaq, ſcribo $\sqrt{C.\,aaq}$. Ut & $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb}$, ad extrahendam radicem cubicam ex a^3-b^3+abb. Quæ quidem radices vocantur quantitates Surdæ ſeu Irrationales, ad modum numerorum ſurdorum ſeu irrationalium, de quibus Arithmetici agunt.

Ubi notandum, ſignum $\sqrt{}$, vocari Signum Radicale, atque in genere uſurpari ad denotandam quamcunque radicem, ſive Quadratam, ſive Cubicam, ſive Quadrato-quadratam &c; ſed ad illam diſtinguendam, communiter ſcribi $\sqrt{Q}$, vel etiam ſimpliciter $\sqrt{}$, ad denotandam radicem Quadratam: & $\sqrt{C}$, ad denotandam radicem Cubicam; & $\sqrt{QQ}$ ſeu $\sqrt{\sqrt{}}$, ad denotandam radicem Quadrato-quadratam &c. quæ radices etiam ſic deſignantur: $\sqrt{}$②, $\sqrt{}$③, $\sqrt{}$④ &c; atque ab aliis, hoc quoque pacto: $\sqrt{}$ʒ, $\sqrt{}$ cε, $\sqrt{}$ ʒʒ &c.

DE LOGISTICA FRACTIONUM.

Quandoquidem ex diviſione quantitatum ſimplicium & compoſitarum oſtenſum eſt oriri Fractiones, ſicut in Arithmeticâ vulgari, quarum operatio eaſdem leges ſequitur atque numerorum fractorum vulgarium; ſatis erit, ſi ſuppoſitis horum regulis, illarum operationem exemplis exponamus.

Hinc

Hinc, cum per fractionem quamlibet deſignetur ſemper diviſionem aliquam eſſe faciendam, utpote illarum quantitatum, quæ numeratoris vicem gerunt, per quantitates, quæ pro denominatore habentur; facile conſtat, ſi numerator denominatori fuerit æqualis, tunc per fractionem illam deſignari unitatem. Ut $\frac{bb}{bb}$, $\frac{ab+bb}{ab+bb}$, & ſimiles. Unde patet, quânam ratione unitas denotari poſſit in formam fractionis, cujus denominator ſit is, qui requiritur.

Quòd ſi verò ab, $aa - bb$ &c. in formam fractionis deſignare velimus, oportet tantùm, aſſumpto ab & $aa - bb$ &c. tanquam numeratore fractionis, ſubſcribere pro denominatore unitatem, hoc pacto: $\frac{ab}{1}$ & $\frac{aa-bb}{1}$ &c.

Porrò ſi quantitas aliqua, ut a, deſignanda ſit in formam fractionis, cujus denominator ea ſit, quæ præſcribitur, ut d, aut $a+b$ &c; oportet, multiplicato a per d, aut per $a+b$, ſcribere $\frac{ad}{d}$, aut $\frac{aa+ab}{a+b}$ &c.

Non aliter fit, ſi $a + \frac{aa}{d}$ ſit redigendum ad formam unius fractionis. Etenim, multiplicato a per denominatorem d, addatur producto ad numerator aa, & ſummæ $ad + qa$ ſubſcribatur denominator d, habebiturque $\frac{ad+aa}{d}$. Sic, & $\frac{aa}{d} - a$ in formam unius fractionis reductum, facit $\frac{aa-ad}{d}$. Haud ſecus ſi $a + b \frac{+aa+bb}{a-b}$ reducatur ad fractionem, fiet $\frac{2aa}{a-b}$.

Cæterum notandum hîc, cum ad dividendum aa per bb, ſcribatur $\frac{aa}{bb}$ pro quotiente; ideo ad hunc quotientem ſive fractionem $\frac{aa}{bb}$ multiplicandum per diviſorem ſeu denominatorem bb, pro producto ſcribendum eſſe numeratorem aa. Non ſecus ſi $\frac{bb}{a-b}$ multiplicetur per $a - b$, productum erit bb. Unde patet ad multiplicandum $\frac{a}{2b}$ per $2ab$; quoniam multiplicato $\frac{a}{2b}$ per $2b$, productum eſt a; supereſt tantùm ut hoc productum adhuc multiplicetur per a, ut habeatur quæſitum productum aa. Similiter ad multiplicandum $\frac{1}{2}$ per $2ab$: cùm multiplicato $\frac{1}{2}$ per 2, fiat 1; hinc multiplican-

dum tantùm reſtat 1 per ab, & fit productum quæſitum $1ab$ ſeu ab. Et ſic de aliis.

De Reductione fractionum ad ſimpliciores.

IAm ad reducendum fractionem $\frac{aac}{cd}$ ad ſimpliciorem; eliſâ communi literâ c, quæ tam in numeratore quàm in denominatore reperitur, fiet $\frac{aa}{d}$. Sic & ad abbreviandum $\frac{ab^3}{abc}$: eliſis literis ab numeratoris atque denominatoris, hoc eſt, diviſo tam ab^3 quàm abc per ab; fiet $\frac{bb}{c}$.

Eodem modo ad abbreviandum $\frac{aac-aad}{cd-dd}$: quoniam diviſo aac per cd, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cc-dd$, producit $aac-aad$; hinc $\frac{aac-aad}{cc-dd}$ ad minores terminos reductum, erit $\frac{aa}{d}$.

Pari ratione ad reducendum $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$: quia (ut ſupra) diviſo aac per cd, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; & rurſus $-bbc$ diviſo per cd, oritur $-\frac{bb}{d}$, quod per $cd-dd$ multiplicatum producit $-bbc+bbd$; hinc $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$ abbreviatum, facit $\frac{aa-bb}{d}$.

Non ſecus $\frac{aac-aad-acd+add}{cd-dd}$ reducitur ad $\frac{aa}{d}-a$, vel $\frac{aa-ad}{d}$. Nam $aac-aad$ diviſum per $cd-dd$, facit $\frac{aa}{d}$; & $-acd+add$ diviſum per $cd-dd$, facit $-a$.

Similiter ſi fuerit $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$: divido a^3-abb per $aa+2ab+bb$, & relinquitur poſt diviſionem $-2aab-2abb$ (nullâ hîc quotientis a habitâ ratione). Deinde divido $aa+2ab+bb$ per reliquum $-2aab-2abb$, & fit quotiens $-\frac{1}{2b}-\frac{1}{2a}$. Hinc cum peracta ſit diviſio, & nihil remaneat, dividendus erit numerator a^3-abb & denominator $aa+2ab+bb$ per $-2aab-2abb$,

Inve-

Invenieturque $\dfrac{-\frac{a}{2b}+\frac{1}{2},}{+\frac{1}{2b}-\frac{1}{2a},}$ pro numeratore, & pro denominatore.

hoc eſt, multiplicando utrumque per $2ab$, habebitur $\frac{-aa+ab}{-a-b}$, ſive, mutatis ſignis, $\frac{aa-ab}{a+b}$.

Nec aliter fit ad abbreviandum $\frac{a^3-b^3}{aa-bb}$. Diviſis enim a^3-b^3 per $aa-bb$, relinquitur $abb-b^3$: dein $aa-bb$ per $abb-b^3$, fit quotiens $\frac{a}{bb}+\frac{1}{b}$, & peracta eſt diviſio abſque reliquo. Quare ſi dividatur a^3-b^3 & $aa-bb$ per $abb-b^3$,

fiet $\dfrac{\frac{aa}{bb}+\frac{a}{b}+1,}{\frac{a}{bb}-\frac{1}{b},}$ pro numeratore. & pro denominatore.

Ideoque ſi ubique multiplicetur per bb, fiet fractio reducta $\frac{aa+ab+bb}{a+b}$.

Simili operatione reducitur $\frac{a^4-b^4}{aa+ab}$ ad $\frac{a^3-aab+abb-b^3}{a}$: Ut & $\frac{x^3-25x}{xx+10x+25}$ ad $\frac{xx-5x}{x+5}$. Et ſic de aliis.

Oſtenſâ igitur ratione, quâ fractiones ad ſimpliciores reduci poſſunt, ſupereſt ut explicemus, quo pacto datis duabus aut pluribus quantitatibus, ſive ſimplicibus, ſive compoſitis, inveniatur minima quantitas, quæ per ipſas ſine reliquo dividi poteſt. id quod in ſequentibus uſum habere patebit. Eſt autem operatio ſimilis ei, quâ ſecundùm prop. 36. lib. 7. Elementorum Euclidis, datis duobus numeris, minimus inveniatur numerus, qui per ipſos ſine reliquo dividatur.

Ut, ad inveniendum minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per duas datas aac & cd: conſtitutis aac & cd in formam fractionis, hoc pacto: $\frac{aac}{cd}$; reduco fractionem hanc ad ejus primitivam, ſeu ſimpliciorem $\frac{aa}{d}$. Quibus juxta ſe poſitis, hoc modo: $\frac{aac}{cd} \times \frac{aa}{d}$, ſi multiplicatio inſtituatur per crucem, procreabitur eadem quantitas ex aac in d, atque ex cd in aa: fiet enim utrobique $aacd$, minima

nima quippe quantitas, quæ ſine reliquo dividi poteſt per aac & cd.

Sic & ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per duas datas $aac - aad$ & $cd - dd$; reduco (ut ante) fractionem $\frac{aac - aad}{cd - dd}$ ad ejus primitivam $\frac{aa}{d}$: Tum multiplicato $aac - aad$ per d, aut $cd - dd$ per aa, fiet quantitas quæſita $aacd - aadd$. minima ſcilicet, quæ diviſibilis eſt per $aac - aad$ & $cd - dd$.

Similiter ſi dentur $a^4 - b^4$ & $aa + ab$: quoniam $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ reducitur ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$, & $a^4 - b^4$ multiplicatum per a facit $a^5 - ab^4$; erit $a^5 - ab^4$ quantitas quæſita.

Eâdem ratione ſi datæ fuerint $x^3 - 25x$ & $xx + 10x + 25$, erit quæſita quantitas $x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x$. Et ſic de cæteris.

Quòd ſi verò compertum ſit aut conſtet, duas illas datas quantitates ad ſimpliciores reduci non poſſe, ſed primitivas eſſe; oportet unam per alteram multiplicare, ad inveniendam quantitatem quæſitam. Ut ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per $aa - ab$ & $a + b$: quoniam $\frac{aa - ab}{a + b}$ ad ſimpliciores terminos reduci nequit, multiplico $aa - ab$ per $a + b$, (cum ſecundùm præcedentia ſcribendum foret $\frac{aa - ab}{a + b} \times \frac{aa - ab}{a + b}$), & fit quæſita quantitas $a^3 - abb$.

Cæterum datis tribus aut pluribus quantitatibus, invenietur minima quantitas quæ per ipſas abſque reliquo dividi poteſt, hoc modo: Ut ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per $a^3 - abb$, $aa + 2ab + bb$, & $aa - bb$: quæro primùm, ut ante, minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per $a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$, & fit $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$. quæ cum & dividatur per $aa - bb$, manifeſtum eſt $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$ eſſe quantitatem quæſitam. Sic & ſi datæ fuerint $a^4 - b^4$, $aa + ab$, $a^4 + aabb$, & $a + b$: inventâ primùm minimâ quantitate $a^5 - ab^4$, quæ dividi poteſt per duas $a^4 - b^4$ & $aa + ab$, (ut ante), quoniam ipſa dividi nequit per tertiam $a^4 - aabb$; hinc ad $a^5 - ab^4$ & $a^4 + aabb$ ſimiliter aliam quæro, ut $a^6 - aab^4$ quæ cum hîc etiam diviſibilis ſit per reliquam $a + b$, patet $a^6 - aab^4$ eſſe quantitatem quæſitam. Et ſic de cæteris.

De Reductione fractionum ad eandem denominationem.

QUibus explicatis, facile eſt oſtendere, quâ ratione fractiones diverſæ denominationis reducantur ad fractiones ejuſdem denominationis. Ut ad reducendum fractiones $\frac{b^3d}{aac}$ & $\frac{a^3}{cd}$ ad eandem denominationem: quæro primùm minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per denominatores aac & cd (ut jam eſt oſtenſum), & fit $aacd$: quę erit denominator communis. Iam ad inveniendum numeratores, dividatur denominator inventus $aacd$ per aac & cd, unumquemque ſcilicet ex denominatoribus datis, & quotientes d & aa multiplicentur per numeratores b^3d & a^3 datarum fractionum, ut habeantur numeratores quæſiti b^3dd & a^5, fiuntque fractiones quæſitæ $\frac{b^3dd}{aacd}$ & $\frac{a^5}{aacd}$.

Similiter ad reducendum $\frac{b^4}{aac-aad}$ & $\frac{a^3+b^3}{cd-dd}$ ad eandem denominationem: invento denominatore communi $aacd-aadd$, minimâ nempe quantitate, quæ dividi poteſt per $aac-aad$ & $cd-dd$, divido $aacd-aadd$ per $aac-aad$ & $cd-dd$, & quotientes d & aa multiplico per numeratores b^4 & a^3+b^3, fiuntque fractiones quæſitæ $\frac{b^4d}{aacd-aadd}$ & $\frac{a^5+aab^3}{aacd-aadd}$.

Eodem modo ſi $\frac{125}{x^3-25x}$ & $\frac{x-25}{xx+10x+25}$ reducantur ad eandem denominationem, provenient $\frac{125x+625}{x^4+5x^3-25xx-125x}$ & $\frac{x^3-30xx+125x}{x^4+5x^3-25xx-125x}$. Non ſecus $\frac{a^5}{a^4-b^4}$, $\frac{a^3-aab}{aa+ab}$, $\frac{a^5-b^5}{a^4+aabb}$ & $\frac{aa+ab+bb}{a+b}$ reductæ ſub eodem denominatore, facient $\frac{a^7}{a^6-aab^4}$, $\frac{a^7-2a^6b+2a^5bb-2a^4b^3+a^3b^4}{a^6-aab^4}$, $\frac{a^7-a^5bb-aab^5+b^7}{a^6-aab^4}$ & $\frac{a^7+a^5bb-a^4b^3-aab^5}{a^6-aab^4}$.

De Additione & Subtractione fractionum.

ADditio & Subtractio fractionum eodem modo perficiuntur, atque additio & ſubtractio numerorum fractorum vulgarium. Etenim ſi fractiones ejuſdem fuerint denominationis, oportet tan-

tùm earum numeratores addere aut ſubtrahere, & ſummæ vel reliquo ſubſcribere denominatorem communem. Ut ad addendum $\frac{aa}{c}$ ad $\frac{bb}{c}$, ſumma erit $\frac{aa+bb}{c}$. Sic & $\frac{2ad}{d+e}$ additum ad $\frac{2ae}{d+e}$, facit $\frac{2ad+2ae}{d+e}$, ſeu $2a$. Non ſecus ſi addantur $\frac{bd}{b+d}$, $d+\frac{bb}{b+d}$ & $a-\frac{dd}{b+d}$, erit ſumma $a+\frac{2bd+bb}{b+d}$.

Quòd ſi fractiones diverſæ denominationis fuerint, reducendæ erunt priùs ad eandem denominationem: quo facto, operandum erit ut jam dictum eſt. Ut ad addendum $\frac{a^3}{a^4-b^4}$, $\frac{a^3-aab}{aa+ab}$, $\frac{a^3-b^3}{a^4+aabb}$ & $\frac{aa+ab+bb}{a+b}$, fiet ſumma $\frac{4a^7-2a^6b+2a^5bb-3a^4b^3+a^3b^4-2aab^5+b^7}{a^6+aab^4}$. Non ſecus ſi addatur $\frac{125}{x^3-25x}$ ad $\frac{x-25}{xx+10x+25}$, erit ſumma $\frac{x^3-30xx+250x+625}{x^4+5x^3-25xx-125x}$.

Jam ad ſubtrahendum $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bb}{c}$, ſcribo pro differentiâ $\frac{bb-aa}{c}$. Eodem modo ſubductis $\frac{2ae}{d-e}$ à $\frac{2ad}{d-e}$, reliquum erit $\frac{2ad-2ae}{d-e}$, ſeu $2a$. Similiter $\frac{bd}{b+d}$ de $d+\frac{bb}{b+d}$, relinquit $\frac{dd+bb}{b+d}$.

Nec aliter fit, ſi ſubtrahendum ſit $\frac{b^4}{aac-aad}$ de $\frac{a^3+b^3}{cd-dd}$. Etenim reductis ad eundem denominatorem, ſi auferatur $\frac{b^4d}{aacd-aadd}$ de $\frac{a^5+aab^3}{aacd-aadd}$, relinquetur $\frac{a^5+aab^3-b^4d}{aacd-aadd}$. Sic & ſi tollatur $\frac{125}{x^3-25x}$ ex $\frac{x-25}{xx+10x+25}$, remanebit $\frac{x^3-30xx-625}{x^4+5x^3-25xx-125x}$.

Eâdem ratione ad ſubducendum $\frac{aa-ab}{a+b}$ de a, reductâ quantitate a ad denominatorem $a+b$, demptóque $\frac{aa-ab}{a+b}$ de $\frac{aa+ab}{a+b}$, fiet reliquum $\frac{2ab}{a+b}$. Non ſecus ſi ſubtrahatur $b+\frac{cc}{b+d}$ de $a+b$, relinquetur $a-\frac{cc}{b+d}$.

De Multiplicatione fractionum.

AD multiplicandum $\frac{ab}{c}$ per $\frac{de}{f}$, multiplico numeratorem ab per numeratorem de, ut & denominatorem c per denominatorem f (ad modum fractionum vulgarium) fitque productum $\frac{abde}{cf}$. Sic & $\frac{aa-bb}{c}$ multiplicatum per $\frac{2ab}{b+c}$, producit $\frac{2a^3b-2ab^3}{bc+cc}$.

Ad faciliorem autem operationem non raro convenit abbreviare quantitates per crucem. Ut ad multiplicandum $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{aa+2ab+bb}$ per $\frac{a^3-abb}{cd-dd}$: quoniam $aac-aad-bbc+bbd$ & $cd-dd$ reducuntur ad ſimpliciores $aa-bb$ & d, ut & a^3-abb & $aa+2ab+bb$ ad $aa-ab$ & $a+b$; hinc loco multiplicandi $aac-aad-bbc+bbd$ per a^3-abb multiplico $aa-bb$ per $aa-ab$; & loco multiplicandi $aa+2ab+bb$ per $cd-dd$ multiplico $a+b$ per d: eritque productum $\frac{a^4-a^3b-aabb+ab^3}{ad+bd}$.

Porrò ad multiplicandum $aa-bb$ per $\frac{aa-ab}{a+b}$: ſubſtituto 1 pro denominatore ipſius $aa-bb$, quoniam numerator $aa-bb$ & denominator $a+b$ reduci poſſunt ad $a-b$ & 1; hinc multiplicatis numeratoribus inter ſe, ut & denominatoribus, fiet productũ $\frac{a^3-2aab+abb}{1}$ ſeu $a^3-2aab+abb$.

Eâdem ratione cùm multiplicatur $a+\frac{bb}{a-b}$ per $a-2b+\frac{bb}{a}$, hoc eſt, $\frac{aa-ab+bb}{a-b}$ per $\frac{aa-2ab+bb}{a}$: quoniam $aa-2ab+bb$ & $a-b$ reduci poſſunt ad $a-b$ & 1; hinc multiplicatis $aa-ab+bb$ per $a-b$, & a per 1, provenit $\frac{a^3-2aab+2abb-b^3}{a}$ ſeu $aa-2ab+2bb-\frac{b^3}{a}$.

Similiter ſi ad multiplicandum proponatur $\frac{xx-5x}{x+5}$ per $\frac{xx-25}{x}$: reductis $xx-5x$ & x ad $x-5$ & 1, itemque $xx-25$ & $x+5$ ad $x-5$ & 1, multiplico tantùm $x-5$ per $x-5$, & fit productum $xx-10x+25$.

Præterea ad multiplicandum $a+\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$: quoniam a per

$a-b$ facit $aa-ab$, & $\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$ facit bb; hinc productum quæſitum erit $aa-ab+bb$. Quâ quoque ratione multiplicabitur $\frac{aa-ab}{a+b}$ per $aa-bb$, & producetur $a^3-2aab+abb$. cum enim $aa-bb$ fiat ex $a+b$ in $a-b$, & $\frac{aa-ab}{a+b}$ multiplicatum per $a+b$ producat $aa-ab$, ſupereſt tantùm multiplicare $aa-bb$ per $a-b$, ut habeatur $a^3-2aab+abb$.

Denique ſi multiplicandum ſit $\frac{a^3-abb}{cd-dd}$ per $c-d$, fiet, diviſis $cd-dd$ per $c-d$, productum $\frac{a^3-abb}{d}$.

De Diviſione fractionum.

AD dividendum $\frac{ab^3}{c}$ per $\frac{bb}{c}$: omiſſo communi denominatore c, divido ab^3 per bb, fietque quotiens ab. Pari ratione ſi $\frac{a^3-abb}{c-d}$ dividatur per $\frac{aa+2ab+bb}{c-d}$, orietur $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$ ſeu $\frac{aa-ab}{a+b}$.

Quòd ſi denominatores fuerint diverſi, reductio ad eandem denominationem fiet ſi multiplicatio inſtituatur per crucem, ut in vulgaribus. Ut ad dividendum $\frac{a^3-b^3}{a+b}$ per $\frac{aa-ab+bb}{c}$: quoniam multiplicato prioris numeratore a^3-b^3 per poſterioris denominatorem c, & hujus numeratore $aa-ab+bb$ per illius denominatorem $a+b$, fiunt a^3c-b^3c & a^3+b^3; hinc quotiens erit $\frac{a^3c-b^3c}{a^3+b^3}$.

Advertendum autem hic eſt ad facilitatem operationis, fractionum numeratores, ſicut etiam denominatores non rarò ad ſimpliciores terminos reduci poſſe. Ut ad dividendum $\frac{a^4-b^4}{aa-2ab+bb}$ per $\frac{aa+ab}{a-b}$: cum numeratores a^4-b^4 & $aa+ab$ reduci poſſint ad $a^3-aab+abb-b^3$ & a, & denominatores $aa-2ab+bb$ & $a-b$ ad $a-b$ & 1; ideo loco multiplicandi a^4-b^4 per $a-b$, multiplico $a^3-aab+abb-b^3$ per 1, & fit $a^3-aab+abb-b^3$; & loco multiplicandi $aa+ab$ per $aa-2ab+bb$ multiplico a per $a-b$, & fit $aa-ab$. unde quotiens diviſionis fit $\frac{a^3-aab+abb-b^3}{aa-ab}$. Eâdem ratione ſi $\frac{x^4-625}{xx-10x+25}$

divi-

dividatur per $\frac{xx+5x}{x-5}$, orietur $\frac{x^3-5xx+25x-125}{xx-5x}$. Nam x^4-625 & $xx+5x$ reduci poſſunt ad $x^3-5xx+25x-125$ & x, quin & $xx-10x+25$ & $x-5$ ad $x-5$ & 1, unde producta ex multiplicatione per crucem fiunt $x^3-5xx+25x-125$ & $xx-5x$.

Porrò ad dividendum $a^3-2aab+abb$ per $\frac{aa-ab}{a+b}$: ſubſtituto 1 pro denominatore dividendi $a^3-2aab+abb$, quoniam numeratores $a^3-2aab+abb$ & $aa-ab$ reduci poſſunt ad $a-b$ & 1; hinc multiplicatis $a-b$ per $a+b$ & 1 per 1, fiet quotiens $aa-bb$.

Sic & ad dividendum $aa+\frac{3abb}{a+4b}$ per $a+b$, hoc eſt $\frac{a^3+4aab+3abb}{a+4b}$ per $\frac{a+b}{1}$: divido $a^3+4aab+3abb$ per $a+b$, & fit $aa+3ab$, unde quotiens quæſitus fit $\frac{aa+3ab}{a+4b}$. Haud aliter ſi dividatur $aa-ab$ per $\frac{aa-ab}{a+b}$, orietur $a+b$. Et $\frac{xx+5x}{x-5}$ per $xx+5x$, orietur $\frac{1}{x-5}$. Ac a^3-aab per $\frac{aa-ab}{a+b}$, orietur $aa+ab$. Et denique $\frac{xx+5x}{x-5}$ per $x+5$, exſurget $\frac{x}{x-5}$.

De Radicum extractione ex fractionibus.

Cum in Radicum extractione ex fractionibus radix ex numeratore & denominatore extracta exhibeat radicem quæſitam; hinc ſi extrahenda ſit radix quadrata ex $\frac{aabb}{cc}$, quoniam radix quadrata ex $aabb$ eſt ab, & radix quadrata ex cc eſt c; ſcribo pro radice quæſitâ $\frac{ab}{c}$.

Eodem modo ſi extrahatur radix quadrata ex $\frac{a^4-2aabb+b^4}{aa+4ab+4bb}$, fiet $\frac{aa-bb}{a+2b}$. Pari ratione ad extrahendam radicem quadratam ex $4+\frac{64xx-160x}{25}$: quoniam $4+\frac{64xx-160x}{25}$ in formam fractionis facit $\frac{100-160x+64xx}{25}$, & radix quadrata ex $100-160x+64xx$ eſt $10-8x$, & radix quadrata ex 25 eſt 5; erit radix quæſita $\frac{10-8x}{5}$ ſeu $2-\frac{8x}{5}$.

Non ſecus radix cubica ex $\frac{27x^6-54x^5+171x^4-188x^3+285xx-150x+125}{x^3-9xx+27x-27}$ erit $\frac{3xx-2x+5}{x-3}$.

Quòd ſi quæſita radix prædicto modo ex numeratore atque denominatore extrahi nequit, præponitur datæ fractioni ſignum radicale $\surd$. Ut ad extrahendam radicem quadratam ex $\frac{ccxx}{4bb} - ac$, ſcribo $\sqrt{\frac{ccxx}{4bb} - ac}$; vel quia $\frac{ccxx}{4bb} - ac$ in formam fractionis facit $\frac{ccxx - 4abbc}{4bb}$, & ex denominatore $4bb$ extrahi poteſt radix, quæ eſt $2b$: ideo quæſita radix ſic quoque ſcribi poterit $\frac{\sqrt{ccxx - 4abbc}}{2b}$. Similiter radix quadrata ex $\frac{aabb}{aa+bb}$, erit $\frac{ab}{\sqrt{aa+bb}}$. Idem de reliquis radicibus eſt intelligendum.

DE LOGISTICA QUANTITATUM SURDARUM.

QUemadmodum fractiones oriuntur ex diviſione imperfectâ quantitatum, quarum una per alteram ſine reliquo dividi nequit: ita ex extractione radicis quantitatum radicem non habentium exſurgunt quantitates Surdæ, quarum operationem ſequentibus exemplis exponere viſum fuit.

De Reductione quantitatum ſurdarum.

SCiendum itaque, quòd, ſicut ad operationem fractionum diverſæ denominationis oportet priùs ipſas ad eundem denominatorem reducere, ita & opus ſit, quantitates ſurdas, ſi diverſa ſigna radicalia habuerint, reducere ad idem ſignũ radicale. Quod fit, ſi ad numeros, à quibus radices denominantur, minimus inveniatur numerus, qui per ipſos ſine reliquo dividi poſſit. Ut ad reducendum $\sqrt{aq}$ ſeu $\surd②\,aq$ & $\surd C.\,aaq$ ſeu $\surd③\,aaq$ ad idem ſignum radicale: quæro ad 2 & 3 (numeros à quibus $\surd Q$ & $\surd C$ denominantur) minimum numerum, qui per ipſos ſine reliquo dividi poteſt, qui eſt 6. Jam cum 6 diviſo per 2 oriatur 3, & per 3 diviſo oriatur 2; hinc aq multiplicandum erit in ſe cubicè, & aaq quadratè; fientque ſub eodem ſigno $\surd QC.\,a^3q^3$ ſeu $\surd⑥\,a^3q^3$, & $\surd QC.\,a^4qq$ ſeu $\surd⑥\,a^4qq$. Sic & $\sqrt{ab}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b + ab^3}}$ ſub eodem ſigno radicali, erunt $\sqrt{\sqrt{aabb}}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b + ab^3}}$.

Huc refer cùm quantitas aliqua rationalis per multiplicationem

in ſe reducitur ad aliquod ſignum radicale. Exempli gratiâ, ad reducendum $a+b$ ad idem ſignum radicis cum $\sqrt{aa+bb}$: oportet multiplicare $a+b$ in ſe quadratè, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$. Non ſecus ſi multiplicetur $a+b$ in ſe cubicè, fiet $\sqrt{C.\,a^3+3aab+3abb+b^3}$ ſub eodem ſigno cum $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb}$. Et ſic de aliis.

Deinde ſciendum quantitates ſurdas non rarò ad ſimpliciores reduci poſſe, tollendo ex ſigno radicali quicquid eſt rationale: nimirum dividendo quantitates ſub eodem ſigno $\sqrt{}$ comprehenſas per aliquod Quadratum, vel Cubum &c. per quod multiplicatione fuerint productæ. Ut $\sqrt{75aa}$ reduci poteſt ad $5a\sqrt{3}$: nam $75aa$ producitur ex multiplicatione $25aa$ per 3, quarum radices ſunt $5a$ & $\sqrt{3}$; adeò ut, ſi $75aa$ dividatur per quadratum $25aa$, ſub ſigno radicali tantùm ſcribendum ſit 3, hoc modo: $5a\sqrt{3}$. Id quod monſtrat $5a$, hoc eſt, $\sqrt{25aa}$, multiplicatum eſſe per $\sqrt{3}$.

Eodem modo cum $a^3b+aabb$ dividi poſſit per quadratum aa, & oriatur $ab+bb$; fit ut pro $\sqrt{a^3b+aabb}$ ſcribi queat $a\sqrt{ab+bb}$.

Similiter quoniam $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$ dividi poteſt per quadratum $aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$, cujus radix eſt $a+c-b$, & quotiens eſt $ab+bb$; hinc loco $\sqrt{a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4}$ ſcribi poteſt $\overline{a+c-b}\sqrt{ab+bb}$.

Non ſecus pro $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$ ſcribi poterit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$: *Pag. 35. lin. 13.* reducto enim ultimo termino ad eandem denominationem cum priori, poteſt utriuſque numerator dividi per $aamm$, cujus radix eſt am, oriturque $oo+4mp$. Denominator autem cum ſit rationalis, liberabitur à ſigno $\sqrt{}$, extrahendo radicem ex $ppzz$.

Eâdem ratione loco $\sqrt{C.\,x^6-9x^5+27x^4-15x^3-108xx+324x-324}$ ſcribi poteſt $\overline{x-3}\sqrt{C.\,x^3+12}$. Et ſic de aliis.

Verùm enimverò quoniam ſæpenumero difficile eſt invenire Quadratum, Cubum &c. per quod diviſio, ad hanc reductionem neceſſaria, inſtitui poſſit; non inutile fuerit, ſi hoc loco oſtendamus, quâ ratione datarum quarumlibet quantitatum diviſores omnes inveniantur, perinde atq; in numeris eſt oſtenſum. vide p. 255. *Ratio inveniendi diviſores omnes quarumcunque datarum quantitatum.*

Dividantur datæ quantitates per quantitatem aliquam primitivam (hoc eſt, quæ non niſi per unitatem aut ſe ipſam dividi poteſt),

teſt), & rurſus quotiens per hanc eandem ſive aliam primitivam, idque fiat donec perveniatur ad quantitatem aliquam primitivam, quæ per ſe ipſam eſt dividenda. Ut ad inveniendum diviſores omnes quantitatis $a^3b+aabb$: divido $a^3b+aabb$ per a, & fit $aab+abb$, id quod rurſus per a diviſum dat $ab+bb$. Jam quia quotiens hic per a ampliùs dividi nequit, divido $ab+bb$ per b, & provenit $a+b$, quæ quantitas eſt primitiva, ideoque per ſe ipſam dividenda. Quibus peractis reſerventur diviſores a, a, b & $a+b$.

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} a^3b+aabb & aab+abb & ab+bb & a+b & 1 \\ a & a & b & a+b & \end{array}$$

Jam ut ex hiſce diviſoribus inveniantur diviſores omnes quantitatis $a^3b+aabb$, multiplico primùm a per a, & fit aa. Deinde b per $1, a$ & aa, fiuntque b, ab & aab. Denique multiplico $a+b$ per $1, a, aa, b, ab$ & aab, & fiunt $a+b, aa+ab, a^3+aab, ab+bb, aab+abb$ & $a^3b+aabb$.

$$\begin{array}{c} 1. \\ \hline a. \quad a. \\ \hline aa. \\ \hline b. \quad ab. \quad aab. \\ \hline a+b.\ aa+ab.\ a^3+aab.\ ab+bb.\ aab+abb.\ a^3b+aabb. \end{array}$$

Atque ita diviſores omnes erunt $1, a, aa, b, ab, aab, a+b, aa+ab, a^3+aab, ab+bb, aab+abb$ & $a^3b+aabb$.

Pag. 87. lin. 27. Eodem modo ut inveniantur diviſores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aac^4$: divido $a^6+2a^4cc+aac^4$ per a, & fit $a^5+2a^3cc+ac^4$, quod rurſus per a diviſum, dat $a^4+2aacc+c^4$. Jam cum hic quotiens dividi ampliùs non poſſit per a aut c ſimilemve quantitatem, divido $a^4+2aacc+c^4$ per $aa+cc$, vel, quod hîc idem eſt, ex $a^4+2aacc+c^4$ extraho radicem quadratam $aa+cc$, quâ denuo per ſeipſam diviſâ, provenit 1. Unde cum diviſores reſervati ſint $a, a, aa+cc$ & $aa+cc$; ideo ut ex iis inveniantur diviſores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aac^4$: multiplico primùm a per a, & fit aa: deinde $1, a$ & aa per $aa+cc$, fiúntque $aa+cc, a^3+acc$ & a^4+aacc: ac denique $aa+cc, a^3+acc$ & a^4+aacc per $aa+cc$ & fiunt $a^4+2aacc+c^4$, $a^5+2a^3cc+ac^4$ & $a^6+2a^4cc+aac^4$; eruntque diviſores omne 1, a, aa,

$aa+cc$,

$aa+cc$, a^3+acc, a^4+aacc, $a^4+{}^2aacc+c^4$, $a^5+{}^2a^3cc+ac^4$ & $a^6+{}^2a^4cc+aac^4$.

$$a^6+2a^4cc+aac^4 \Big| \, a^5+{}^2a^3cc+ac^4 \Big| \, a^4+2aacc+c^4 \Big| \, aa+cc \Big| \, 1$$
$$a \qquad\qquad\qquad a \qquad\qquad aa+cc \qquad aa+cc$$

$$1.$$
$$a. \qquad a.$$
$$aa.$$
$$a^4+cc. \; a^3+acc. \; a^4+aacc.$$
$$aa+cc. \; a^4+{}^2aacc+c^4. \; a^5+{}^2a^3cc+ac^4. \; a^6+{}^2a^4cc+aac^4.$$

Similiter ad inveniendum diviſores omnes quantitatis $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$: quia factâ diviſione per b, oritur $a^3-aab+2aac+acc-abb+bcc-2bbc+b^3$, & hujus quotientis per $a+b$, oritur $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, & radix quadrata ex $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$ eſt $a+c-b$, hoc eſt, $aa-2ab-2ac-2bc+cc+bb$ diviſum per $a+c-d$, dat $a+c-b$; divido demum $a+c-b$ per $a+c-b$, & fit 1. Unde cum diviſores reſervati ſint b, $a+b$, $a+c-b$ & $a+c-b$; multiplico b per $a+b$, & fit $ab+bb$: tum 1, b, $a+b$ & $ab+bb$ per $a+c-b$, fiuntque $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$ & $aab+abc+bbc-b^3$: ac denique $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$ & $aab+abc+bbc-b^3$ per $a+c-b$, fiuntque $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, $aab+2abc+bcc-2abb-2bbc+b^3$, $a^3+2aac+acc-aab-abb+bcc-2bbc+b^3$, & $a^3b+aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$. Atque ita diviſores omnes erunt 1, b, $a+b$, $ab+bb$, $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, $aab+abc+bbc-b^3$, $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, $aab+2abc+bcc-2abb-2bbc+b^3$, $a^3+2aac+acc-aab-abb+bcc-2bbc+b^3$ & $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$.

Non ſecus ſi proponatur a^3bc-ab^3c, invenientur ex diviſoribus reſervatis $a,b,c,a-b$ & $a+b$ diviſores ſequentes: $1,a,b,ab,c,ac,bc,abc$, $a-b$, $aa-ab$, $ab-bb$, $aab-abb$, $ac+bc$, $aac-abc$, $abc-bbc$, $aabc-abbc$, $a+b$, $aa+ab$, $ab+bb$, $aab+abb$, $ac+bc$, $aac+abc$, $abc+bbc$, $aabc+abbc$, $aa-bb$, a^3-abb, $aab-b^3$, a^3b-ab^3, $aac-bbc$, $a^3c-abbc$, $aabc-b^3c$ & a^3bc-ab^3c.

Neque prætereundum hocloco videtur, quo pacto horum di-

 viſorum

viſorum ope duæ, pluréſve quantitates datæ aliâ ratione, quam ex ſuperioribus facile fuit colligere, ad ſimpliciſſimos terminos reduci queant. Ut ad reducendum a^3-abb, $aab-b^3$ & $a^3+aab-abb-b^3$ ad terminos ſimpliciſſimos, eandem cum ipſis rationem habentes; quæro primò (ut ante) omnes cujuſque quantitatis datæ diviſores: eruntque ipſius a^3-abb diviſores 1, a, $a-b$, $aa-ab$, $a+b$, $aa+ab$, $aa-bb$ & a^3-abb: ipſius autem $aab-b^3$ diviſores erunt 1, b, $a-b$, $ab-bb$, $a+b$, $ab+bb$, $aa-bb$ & $aab-b^3$: at verò ipſius $a^3+aab-abb-b^3$ diviſores erunt 1, $a-b$, $a+b$, $aa-bb$, $aa+2ab+bb$ & $a^3+aab-abb-b^3$. Jam cum inter ipſos tres ſint, qui ſibi invicem reſpondeant, ut $a-b$, $a+b$ & $aa-bb$, quorum ope datæ quantitates ad ſimpliciores reduci poſſunt; hinc ad inveniendum terminos ſimpliciſſimos, divido a^3-abb, $aab-b^3$ & $a^3+aab-abb-b^3$ per $aa-bb$ (utpote diviſorem pluribus dimenſionibus conſtantem), fiuntque a, b, & $a+b$. Ubi notandum, quantitates propoſitas fore inter ſe primas, ſi nulli ex diviſoribus ſibi mutuò reſpondeant.

Quæ ratio inveniendi diviſores non ineptè quoque adhiberi poteſt ad fractionum abbreviationem. Ut ad abbreviandum
Vide ſupra Pag. 22. $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$: quia tam numerator quàm denominator dividi poteſt per $a+b$, poterit pro $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$ ſcribi $\frac{aa-ab}{a+b}$. Et ſic de cæteris.

Inventis autem omnibus diviſoribus, videndum eſt num aliqui ex ipſis ſint quadrati, vel cubi &c. qui ſi reperiantur; adhiberi poterunt ad prædictum modum liberandi quantitates ex ſigno radicali. Ut quia inter diviſores quantitatis $a^3b+aabb$ reperitur quadratum aa, poterit $\sqrt{a^3b+aabb}$, dividendo per aa, reduci ad $a\sqrt{ab+bb}$.

Sic & cum $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$ pro diviſore habeat quoque quadratum $aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$, poterit pro $\sqrt{a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4}$ ſcribi $a+c-b\sqrt{ab+bb}$. Similiter cum numerus 75 inter diviſores quoque habeat quadratum numerum 25, reduci poterit $\sqrt{75aa}$ ad $5a\sqrt{3}$. Ita &, quia 1200 dividi poteſt per numeros quadratos 4, 16, 25, 100 & 400; poterit pro $\sqrt{1200aabb}$ ſcribi $2ab\sqrt{300}$ vel $4ab\sqrt{75}$, vel $5ab\sqrt{48}$, vel $10ab\sqrt{12}$, vel denique $20ab\sqrt{3}$.

Quòd

Quòd ſi inter diviſores præter unitatem quadratum nullum aut cubus &c. reperiatur, non poterit data quantitas præcedenti modo reduci, niſi velis eam in formam fractionis deſignare. Ut quia 10 præter unitatem quadratum nullum inter diviſores admittit, poterit $\sqrt{10aa}$, dividendo 10 per aliquod quadratum, ut lubet, ut 4, 25, 100 &c. denotari hoc pacto: $2a\sqrt{\frac{5}{2}}$, vel $5a\sqrt{\frac{2}{5}}$, vel $10a\sqrt{\frac{1}{10}}$ &c.

Sciendum denique, quòd, licèt hæ quantitates omnes per ſe conſideratæ ſurdæ exiſtant, tamen inter ſe collatæ duorum ſint generum: aliæ enim dicuntur Commenſurabiles ſeu Communicantes; aliæ verò Incommenſurabiles ſeu non Communicantes.

Communicantes ſunt, quæ affinitatem habentes cum quantitatibus rationalibus, aut etiam numeris, inter ſe ſunt ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, ſeu ſicut numerus ad numerum.

Non Communicantes verò ſunt, quarum unius ad alteram relatio non eſt ut quantitatis rationalis ad quantitatem rationalem, aut numeri ad numerum.

Ratio autem dignoſcendi communicantes à non communicantibus eſt, ſi, poſtquam ad ſimpliciſſimos terminos ſunt reductæ, reperiantur inter ſe eſſe ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, aut numerus ad numerum. Ut $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ ſunt communicantes, quia diviſione per $\sqrt{3}$, maximum earum communem diviſorem, reducuntur ad $\sqrt{25aa}$ & $\sqrt{9aa}$, hoc eſt, ad $5a$ & $3a$: adeò ut pro $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ ſcribi poſſit $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$, quæ inter ſe ſunt ut $5a$ ad $3a$, vel 5 ad 3.

Eodem modo communicantes erunt $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, quia utrâque diviſâ per $aa+bb$, oriuntur $\sqrt{aa}$ & $\sqrt{bb}$, ſeu a & b: ideoque reducuntur ad $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$, quæ inter ſe ſunt ut a ad b.

Similiter communicantes ſunt $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$: Pag. 35.
quippe reducuntur ad $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, quarum unius ad alteram ratio eſt, ut $\frac{z}{a}$ ad $\frac{am}{pz}$, ſeu pzz ad aam.

Haud aliter communicantes erunt $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$

& $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$: reductæ enim ad $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$ & $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$, habent inter ſe eam rationem, quæ eſt ipſius $x+3$ ad $5-x$. Et ſic de aliis.

De Additione & Subtractione quantitatum ſurdarum.

AD addendum vel ſubtrahendum quantitates ſurdas, oportet primùm explorare utrum ſint communicantes nec ne: ſi enim communicantes fuerint, adduntur tantùm vel ſubtrahuntur quantitates vel numeri, qui extra ſignum radicale reperiuntur. Ut ad addendum $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$, hoc eſt, $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$, ſcribo, additis $5a$ & $3a$, pro ſummâ $8a\sqrt{3}$; & $2a\sqrt{3}$, pro earundem differentiâ, utpote ſublatis $3a$ ex $5a$.

Eodem modo ſi fuerint $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc eſt, $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$: addendo & ſubtrahendo a & b, erit ſumma $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$, & differentia $\overline{a = b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter ſi proponatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$, hoc eſt, $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, erit ſumma $\frac{pzz+aam}{apz}\sqrt{oo+4mp}$, & differentia $\frac{pzz = aam}{apz}\sqrt{oo+4mp}$. Nec aliter fit

Pag. 188. lin. ult. ſi habeatur $\sqrt{\frac{4aabb-4aaxx}{b}}$ vel $\frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx}$ & $\sqrt{bb-xx}$: erit enim ſumma $\frac{2a+b}{b}\sqrt{bb-xx}$, & differentia $\frac{2a = b}{b}\sqrt{bb-xx}$. Pari ratione additis $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc eſt, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$ & $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$, erit ſumma $8\sqrt{xx+12}$, eiſdemque ſubtractis, erit differentia $\overline{2x = 2}\sqrt{xx+12}$.

Quòd ſi verò non communicantes fuerint, non poterunt addi vel ſubtrahi ita ut unam radicem conſtituant, quocirca addendæ vel ſubtrahendæ ſunt mediantibus ſignis $+$ & $-$. unde Binomia & Multinomia exſurgunt. Ut ſi addendum ſit $\sqrt{aa+bb}$ ad $\sqrt{aa-bb}$, ſcribo pro ſummâ $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$; & ad ſubtrahendum $\sqrt{aa-bb}$ de $\sqrt{aa+bb}$, ſcribo pro reliquo $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$. Non ſecus ſi addatur $a+b$ ad $\sqrt{aa+bb}$, erit ſumma $a+b+\sqrt{aa+bb}$; at ſi ſubducatur

$\sqrt{aa}$

$\sqrt{aa+bb}$ de $a+b$, erit reliquum $a+b-\sqrt{aa+bb}$. Cum enim $a+b$ ſit quantitas rationalis, & $\sqrt{aa+bb}$ quantitas ſurda, non magis communicantes eſſe poſſunt, quàm omnes quantitates ſurdæ, quæ diverſis ſignis radicalibus deſignantur. Haud diſſimili ratione concludes ſummam ex $aa+bb+a\sqrt{aa+bb}$ & $aa-bb-b\sqrt{aa+bb}$ eſſe $2aa+\overline{a-b}\sqrt{aa+bb}$, & differentiam eſſe $2bb+\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$.

De Multiplicatione quantitatum ſurdarum.

SI quantitates datæ ſunt communicantes, oportet, multiplicatis quantitatibus vel numeris extra ſignum radicale poſitis, productum multiplicare per quantitatem vel numerum ſub ſigno radicali contentum, ut habeatur productum quæſitum. Ut ad multiplicandum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc eſt, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$, multiplico primùm $5a$ per $3a$, & fit $15aa$: tum $15aa$ per 3, eritque productum quæſitum $45aa$.

Eodem modo ad multiplicandum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc eſt, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: multiplicato a per b, & producto ab per $aa+bb$, fiet productum quæſitum a^3b+ab^3. Nec aliter fit ſi ad multiplicandum proponatur $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ per $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc eſt, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$, per $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$: Multiplicatis enim $x+3$ per $5-x$, fit $15+2x-xx$, quod multiplicatum per $xx+12$, productum facit $180+24x+3xx+2x^3-x^4$.

Quòd ſi datæ quantitates non fuerint communicantes, oportet tantùm multiplicare quantitates ſub ſignis radicalibus comprehenſas, & producto præfigere commune ſignum radicale. Si verò ſigna radicalia diverſa fuerint, reducenda priùs ſunt ad idem ſignum, ſicut ſuperiùs eſt oſtenſum, & deinde operandum, ut jam dictum eſt. Ut, ad multiplicandum $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{cd}$: multiplicatis ab per cd, præfigatur producto $abcd$ ſignum $\sqrt{\ }$, & fit productum quæſitum $\sqrt{abcd}$. Sic & ad multiplicandum $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa-bb}$: multiplicatis $aa+bb$ per $aa-bb$, fiet productum $\sqrt{a^4-b^4}$. Similiter ſi multiplicari debeat $\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, reduco priùs $a+b$ ad idem ſignum radicale, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$: tum multiplicatis $aa+2ab+bb$ per $aa+bb$, fit productum $\sqrt{a^4+2a^3b+2aabb+2ab^3+b^4}$, vel etiam ſcribendo

 hoc

hoc pacto: $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Nec aliter fit ſi multiplicandum ſit $a+\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$, hoc eſt, $a+\sqrt{bc}$ in ſe: multiplico primùm $a+\sqrt{bc}$ per a, & fit $aa+a\sqrt{bc}$: tum $a+\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$, fitq; $a\sqrt{bc}+bc$. quæ producta ſi addantur, fiet productum quæſitum $aa+bc+2a\sqrt{bc}$. Non ſecus ſi multiplicandum proponatur $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$ per $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$: quia multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa+bb}$, & $+\sqrt{aa-bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$ (omiſſis ſcilicet tantùm ſignis radicalibus) fiunt $aa+bb$ & $-aa+bb$; at verò multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$, & $\sqrt{aa+bb}$ per $+\sqrt{aa-bb}$ producta evaneſcunt: hinc productum quæſitum erit $2bb$.

De Diviſione quantitatum ſurdarum.

SI datæ quantitates ſunt communicantes, oportet tantùm dividere quantitates, vel numeros, extra ſignum radicale poſitos, & quod oritur erit quotiens quæſitus. Ut ad dividendum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc eſt, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$: divido $5a$ per $3a$, ſeu 5 per 3; eritque quotiens quæſitus $\frac{5}{3}$ ſeu $1\frac{2}{3}$. Sic & ad dividendum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc eſt, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: diviſis a per b, fit quotiens $\frac{a}{b}$. Non ſecus $\sqrt{abcc}$ ſeu $c\sqrt{ab}$ diviſum per $\sqrt{ab}$ dat c. Et ſic de aliis.

Quòd ſi communicantes non fuerint, dividendæ erunt quantitates ſub ſignis radicalibus comprehenſæ, & ei quod oritur præfigendum eſt commune ſignum radicale. Ut ad dividendum $\sqrt{a^3b-ab^3}$ per $\sqrt{aa-bb}$: diviſis a^3b-ab^3 per $aa-bb$, fit ab; unde quotiens quæſitus erit $\sqrt{ab}$.

Et quidem ſi ſigna radicalia fuerint diverſa, reducenda priùs erunt ad idem ſignum, & deinde operatio inſtituenda erit, ut jam dictum eſt. Ut ad dividendum a^3+abb per $\sqrt{a^4+aabb}$: multiplicando a^3+abb in ſe, fit $a^6+2a^4bb+aab^4$; quare diviſâ $\sqrt{a^6+2a^4bb+aab^4}$ per $\sqrt{a^4+aabb}$, erit quotiens $\sqrt{aa+bb}$. Sic & ſi dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$ per $a+b$: multiplico primùm $a+b$ in ſe, ut fiat ſub eodem ſigno radicali $\sqrt{aa+2ab+bb}$, quo facto, ſi dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2a^3b-b^4}$ per $\sqrt{aa+2ab+bb}$, fiet quotiens quæſitus $\sqrt{aa-bb}$.

Non

Non aliâ ratione $aa+bb$ diviſum per $\sqrt{aa+bb}$, facit $\sqrt{aa+bb}$. quippe diviſo quadrato per ſuum latus, oritur latus. Unde ſi a^3+abb dividatur per $\sqrt{aa+bb}$, orietur $a\sqrt{aa+bb}$.

Porrò ſi dividendum ſit $a^3+abb+ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, divido primùm a^3+abb per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit, ut ante, $\sqrt{aa+bv}$; tum $ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit b, unde quotiens quæſitus erit $\sqrt{aa+bb}+b$. Non ſecus ſi dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}-aa+bb$ per $a+b$, orietur $\sqrt{aa-bb}-a+b$. Similiter ſi dividendum proponatur $ab+b\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$: quoniam ab diviſâ per a, eadem exoritur quantitas b, quæ provenit dividendo $b\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$: hinc quotiens quæſitus erit b. Eodem modo $aab-bbc-ab+\frac{bbc}{a}\sqrt{bc}$ diviſum per $a-\sqrt{bc}$, facit $ab-\frac{bbc}{a}$.

Poſtea ad dividendum $aa-bc$ per $a+\sqrt{bc}$ divido aa per a, & fit a, quod multiplicatum per $\sqrt{bc}$ producit $a\sqrt{bc}$, eritque reliquum dividendi $-a\sqrt{bc}-bc$. diviſo jam $-a\sqrt{bc}$ per a, fit $\sqrt{bc}$, quod multiplicatum per $+\sqrt{bc}$, facit $-bc$: hoc igitur ſi auferatur à reliquo dividendi $-bc$, relinquetur o, & abſoluta erit diviſio, eritque quotiens quæſitus $a-\sqrt{bc}$. Eodem modo $ab-cd$ diviſum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$: & $a^3+bc\sqrt{bc}$ diviſum per $a+\sqrt{bc}$, dat $aa+bc-a\sqrt{bc}$: & $aabb-ccdd$ diviſum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\overline{ab+cd}\sqrt{ab}+\overline{ab+cd}\sqrt{cd}$: & $a^3b-abbc$ diviſum per $aa+a\sqrt{bc}$, dat $ab-b\sqrt{bc}$: ut & $a^3-abc+\overline{aa-bc}\sqrt{bc}$ diviſum per $a-\sqrt{bc}$, dat $aa+bc+2a\sqrt{bc}$.

Denique ad dividendum $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$: quia $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$ ſeu $\sqrt{cc-2cd+dd}$ dividi nequit, ſcribo pro quotiente $\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{c-d}$, vel $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{cc-2cd+dd}}$, vel etiam hoc pacto: $\frac{1}{c-d}\sqrt{a^4+b^4}$. Eodem modo ſi dividatur $a\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, fiet quotiens $\frac{a}{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter $aa+bb$ diviſum per $\sqrt{aa-bb}$ exhibet quotientem $\frac{aa+bb}{\sqrt{aa-bb}}$: & $aa+\sqrt{abcd}$ per $a+\sqrt{bc}$, facit $\frac{aa+\sqrt{abcd}}{a+\sqrt{bc}}$. Sic etiam ad dividendum $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ per $8\sqrt{xx+12}$, ſcribitur pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x^3-x^4}{8\sqrt{xx+12}}$; vel quia $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ producitur

citur ex $\overline{15+2x-xx}$ in $\overline{xx+12}$, quadratum nempe ipſius $\sqrt{xx+12}$, fit ut ſcribi quoque poſſit $\frac{\overline{15+2x-xx}\ \text{in}\ \overline{xx+12}}{8\sqrt{xx+12}}$, vel breviùs $\frac{15+2x-xx}{8}\sqrt{xx+12}$, utpote dividendo $xx+12$ per $\sqrt{xx+12}$. Non aliter ſi $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ ſit dividendum per $x+3\sqrt{xx+12}$, ſcribo pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x^3-x^4}{x+3\sqrt{xx+12}}$ ſeu $\frac{60-12x+5xx-x^3}{\sqrt{xx+12}}$. nam $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ dividi poteſt per $x+3$, & fit $60-12x+5xx-x^3$; vel quoniam $60-12x+5xx-x^3$ producitur ex $\overline{5-x}$ in $\overline{xx+12}$, fit ut etiam ſcribi poſſit $\frac{\overline{5-x}\ \text{in}\ \overline{xx+12}}{\sqrt{xx+12}}$ ſeu $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$.

De Extractione Radicis Quadratæ ex Binomiis.

MOdus, quo ex quantitatibus binomiis radix quadrata extrahitur, non differt ab eo, qui in numeris adhiberi ſolet ad inventionem radicis quadratæ ex Binomiis, eſtque talis: *Subductis quadratis partium dati Binomii à ſe invicem, ſi radix quadrata reliqui ad partem majorem addatur, & ab eâdem auferatur; erunt radices quadratæ ex ſemiſſe ſummæ & differentiæ, per ſignum + vel − dati Binomii connexæ, binæ partes radicis quæſitæ.*

Regula extrahendi radicem quadratam ex Binomiis.

Ut ad extrahendum radicem quadratam ex $aa+bc+2a\sqrt{bc}$, ſubtraho $4aabc$, quadratum minoris partis ex $a^4+2aabc+bbcc$ quadrato partis majoris, & relinquitur $a^4-2aabc+bbcc$, cujus radix quadrata $aa-bc$ addita ad majorem partem $aa+bc$, & ab eâdem ablata facit ſummam $2aa$, & differentiam $2bc$, quarum ſemiſſes ſunt aa & bc: unde radices quadratæ ſunt a & $\sqrt{bc}$, quæ ſi connectantur per ſignum +, erit radix quæſita $a+\sqrt{bc}$.

Pag. 195. lin. 6.

Sic radix quadrata ex $mm+\frac{pxx}{m}+x\sqrt{4pm}$ erit $m+x\sqrt{\frac{p}{m}}$.

Eodem modo ſi extrahenda ſit radix quadrata ex $\overline{a+b}\sqrt{ab}+2ab$: ſubducto $4aabb$, quadrato partis minoris, ex $a^3b+2aabb+ab^3$, quadrato minoris partis, erit reliqui $a^3b-2aabb+ab^3$ radix quadrata $\overline{a-b}\sqrt{ab}$. quæ ſi addatur & auferatur ex majori parte $\overline{a+b}\sqrt{ab}$, fiet ſumma $2a\sqrt{ab}$, & differentia $2b\sqrt{ab}$, unde ſemiſſium radices quadratæ conſtituunt radicem quæſitam $\sqrt{a\sqrt{ab}}+\sqrt{b\sqrt{ab}}$ ſeu $\sqrt{\sqrt{a^3b}}+\sqrt{\sqrt{ab^3}}$.

Nec

Nec aliter fit cùm extrahitur radix quadrata ex $\overline{a+d}\sqrt{bc}+2\sqrt{abcd}$: etenim ſubtracto $4abcd$, quadrato minoris partis, ex $aabc+2abcd+bcdd$, quadrato majoris partis, relinquetur $aabc-2abcd+bcdd$, cujus radix quadrata eſt $\overline{a-d}\sqrt{bc}$: hæc ergo ſi addatur & ſubtrahatur ex majori parte $\overline{a+d}\sqrt{bc}$, erit ſumma $2a\sqrt{bc}$, & differentia $2d\sqrt{bc}$: Ex quarum dimidiis ſi radices quadratæ extrahantur, fiet radix quæſita $\sqrt{a\sqrt{bc}}+\sqrt{d\sqrt{bc}}$ vel $\sqrt{\sqrt{aabc}}+\sqrt{\sqrt{ddbc}}$.

Quòd ſi ſubductis quadratis partium dati binomii à ſe invicem, reliqui radix quadrata & major pars binomii communicantes non fuerint: ſatiùs erit ipſi binomio ſignum univerſale radicis quadratæ præfigere. Ut ad extrahendam radicem quadratam ex $-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ ſcribo $\sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$. quæ radices vulgò appellantur Univerſales. Pag. 7

DE REDVCTIONE ÆQVATIONVM.

QUoniam ad reſolvendum aliquod Problema, id ipſum ſupponendum eſt ut jam factum, atque nomina imponenda ſunt quantitatibus tum datis, tum quæſitis: & quidem pro datis à D. Des-Cartes ordinariè ponantur priores literæ Alphabeti, a, b, c, &c. pro quæſitis autem poſteriores z, y, x, &c; ſit ut percurrendo Problematis difficultatem, eo ordine, quo omnium naturaliſſimè patet, quâ ratione dictæ quantitates, nullo inter cognitas & incognitas facto diſcrimine, à ſe invicem dependent, tandem inveniatur via quantitatem aliquam duobus modis exprimendi. id quod Æquatio vocatur. Unde cum æquatio nihil aliud ſit, quàm mutua comparatio duarum rerum æqualium, quæ variè denominantur: facilè conſtat, quantitates haſce cognitas & incognitas, prout diverſimode ſunt affectæ atque diſpoſitæ, diverſas efficere poſſe Æquationum formulas, quæ tamen per ſequentes regulas reduci queunt ad haſce ſimileſve ſpecies:

$z \propto b$, aut

$zz \propto -az+bb$, aut

$z^3 \propto +azz+bbz-c^3$, aut

$z^4 \propto +az^3+bbzz-c^3z+d^4$, &c.

De Reductione per Additionem.

VT ſi habeatur æquatio inter $z-3$ & 12, hoc eſt, ſi fuerit $z-3 \propto 12$: quoniam ſi æqualibus æqualia vel idem addas, ea quæ fiunt ſunt æqualia; hinc ſi utrinque addatur $+3$, fiet $z \propto 15$. nam -3 & $+3$ addita faciunt o.

Sic & ſi fuerit $z-b \propto 0$, fiet addendo utrinque b, $z \propto b$. Aut ſi habeatur $b-z \propto 0$, fiet addendo utrobique z, $b \propto z$. Et ſi habeatur $zz-aq \propto 0$, erit $zz \propto aq$: ut & ſi z^3-aaq æquetur o, fiet $z^3 \propto aaq$, &c.

Non ſecus ſi habeatur $z^4-az^3-bbzz \propto d^4-c^3z$, addendo utrique parti $+az^3+bbzz$, fiet $z^4 \propto az^3+bbzz-c^3z+d^4$.

Ex quibus conſtat, quantitates ſigno — adfectas, addi utrique parti, ſi eximantur ab unà parte, & in alteram partem transferantur ſub ſigno +.

De Reductione per Subtractionem.

DEinde ſi fuerit $z+3 \propto 12$; quia ſi ab æqualibus æqualia vel idem auferas, illa quæ relinquuntur ſunt æqualia, fit ut, ſubtrahendo utrinque $+3$, habeatur $z \propto 9$.

Eodem modo ſi habeatur $zz+az \propto bb$, ſubtracto utrinque $+az$, fiet $zz \propto -az+bb$.

Similiter $z^3+{}^{2}c^{3} \propto azz+bbz+c^3$, reducetur ad $z^3 \propto azz+bbz-c^3$, ſubtrahendo utrinque $+{}^{2}c^{3}$.

Unde colligitur quantitates ſigno + adfectas ab utrâque parte ſubtrahi, eximendo ipſas ex unâ parte & transferendo in alteram partem ſub ſigno —: atque adeò quicquid vel additione vel ſubtractione transfertur, adfici ſigno contrario.

De Reductione per Multiplicationem.

POrrò ſi ad reducendum proponatur $\frac{z}{3} \propto 5$: quoniam æqualia per æqualia vel idem multiplicata, producunt æqualia; fiet multiplicando utrinque per 3, $z \propto 15$. Sic & ſi habeatur $z \propto \frac{aq}{z}$, invenietur multiplicando utrinque per z, $zz \propto aq$, &c.

Eodem

Eodem modo ſi fuerit $\frac{zz}{z-b} \propto a$: quoniam delendo denominatorem $z-b$ prioris partis $\frac{zz}{z-b}$, ipſa pars multiplicatur per $z-b$: hinc oportet etiam alteram partem a multiplicare per $z-b$, ut habeatur æquatio inter zz & $az-ab$.

Similiter ſi ſit $\frac{zz}{a} \propto \frac{zz-bz+bb}{z}$: quoniam ſublato denominatore a, partis prioris $\frac{zz}{a}$, multiplicata eſt pars prior per a, & fit zz; hinc oportet & alteram partem $\frac{zz-bz+bb}{z}$ multiplicare per a, ut habeatur $\frac{azz-abz+abb}{z}$. Unde cum æquatio propoſita reducta ſit ad $zz \propto \frac{azz-abz+abb}{z}$, ſi denuo utraque pars multiplicetur per z, denominatorem poſterioris partis $\frac{azz-abz+abb}{z}$, fiet $z^3 \propto azz-abz+abb$.

Ex quibus patet, æquationem, cujus utraque pars eſt fractio, reduci ad aliam, quæ fractione careat, multiplicando per crucem, numeratorem nempe prioris partis per denominatorem poſterioris, & numeratorem poſterioris partis per denominatorem prioris. Quod idem eſt ac ſi binæ partes æquationis ad eandem denominationem reducantur, ipſæque deinde, omittendo communem denominatorem, per eundem multiplicentur.

Ubi notandum ad majorem abbreviationem atque operationis facilitatem non raró tum numeratores, tum denominatores, ante hanc multiplicationem ad ſimpliciores terminos reduci poſſe. Ut ſi fuerit $\frac{z^3}{zz-aa} \propto \frac{az-aa}{z+a}$: reductis denominatoribus $zz-aa$ & $z+a$ ad $z-a$ & 1, fiet $\frac{z^3}{z-a} \propto \frac{az-aa}{1}$. ac proinde ſi multiplicetur per crucem, invenietur $z^3 \propto azz-2aaz+a^3$. Similiter ſi habeatur $\frac{aaz-bbz}{z+b} \propto \frac{a^3-abb}{z}$: reductis numeratoribus $aaz-bbz$ & a^3-abb ad z & a, habebitur $\frac{z}{z+b} \propto \frac{a}{z}$, ubi ſi per crucem multiplicetur, fiet $zz \propto az+ab$. Non ſecus ſi habeatur $\frac{azz-bzz}{bb-bz} \propto \frac{aa-ab}{b}$: cum numeratores $azz-bzz$ & $aa-ab$ reduci poſſint ad zz & a, ut & denominatores $bb-bz$ & b ad $b-z$ & 1, fiet $\frac{zz}{b-z} \propto \frac{a}{1}$; ideoque multiplicando per crucem, exſurget $zz \propto -az+ab$.

Huc etiam refer, cùm integrum æquatur fractioni. Ut ſi habeatur æquatio inter $\frac{az^3-bz^3}{zz+az+aa}$ & $ab-bb$: ſubſtitutâ enim unitate pro denominatore ipſius integri $ab-bb$, cum az^3-bz^3 & $ab-bb$ reduci poſſint ad z^3 & b, erit æquatio talis $\frac{z^3}{zz+az+aa} \propto \frac{b}{1}$, unde multiplicando per crucem, invenietur æquatio $z^3 \propto bzz+abz+aab$.

Adhæc ſi proponatur $\sqrt{z}$ æquari 5: quoniam æqualium æqualia quoque ſunt quadrata, cubi &c; hinc ſi utraque pars in ſe multiplicetur quadratè, habebitur $z \propto 25$. Sic & ſi fuerit $\sqrt{z} \propto \sqrt{5}$: ductâ utrâque parte in ſe quadratè, fiet $z \propto 5$. Pari ratione ſi $\sqrt{z}$ æquetur $\sqrt{aab-b}$, erit $z \propto aab-b$. Haud ſecus ſi fuerit $\sqrt{C.z} \propto \sqrt{C.aabb-b}$, fiet, utramque partem in ſe multiplicando cubicè, $z \propto aabb-b$. Et ſic de aliis.

De Reductione per Diviſionem.

POſtea ſi detur $zz \propto 4z$: quoniam æqualibus per æqualia vel idem diviſis, proveniunt æqualia, fit ut, ſi utraque pars dividatur per z, oriatur $z \propto 4$. Sic & ſi habeatur $z^4 \propto az^3+bbzz$, fiet dividendo utrinque per zz, $zz \propto az+bb$. Similiter fit, ſi proponatur $3z \propto 12$: etenim ſi utrobique dividatur per 3, proveniet $z \propto 4$. Eodem modo ſi fuerit $az \propto ab$, dividendo utramque partem per a, fiet $z \propto b$. Nec
Pag. 168. lin. 6. aliter ſi habeatur $ax-bx \propto bb$, orietur, diviſâ utrâque parte per $a-b$, $x \propto \frac{bb}{a-b}$. Haud ſecus ſi proponatur $azz+bzz \propto abz+bbz-abb-b^3$: quoniam utraque pars dividi poteſt per $a+b$, orietur $zz \propto bz-bb$. Sic & ſi fuerit $azz-bzz \propto aaz-bbz+abc$, fiet, dividendo utrinque per $a-b$, $zz \propto az+bz+\frac{abc}{a-b}$, ſeu $zz \propto \begin{matrix}a\\+b\end{matrix} z+\frac{abc}{a-b}$.

Huc referendum quoque eſt, cùm binæ æquationis partes juxta modum p.34. oſtenſum, reduci poſſunt ad ſimpliciores terminos. Ut ſi fuerit æquatio inter $az^4-abz^3+abbzz$ & $-abz^3+2abbzz-2ab^3z+ab^4$: dividendo utramque partem per maximum communem diviſorem $azz-abz+abb$, orietur $zz \propto -bz+bb$.

De Reductione per Extractionem Radicis.

DEniq; ad reducendum $zz \propto 25$: quoniam æqualium quadratorũ ac cuborum &c. æqualia quoque ſunt latera ſeu radices, fit ut, ſi

ex utrâque parte extrahatur radix quadrata, proveniat $z \propto 5$. Sic & ſi fuerit $z^3 \propto 125$, erit, extractâ utrinq; radice cubicâ, $z \propto 5$. Eâdē ratione, ſi habeatur $zz \propto aa+2ab+bb$: extractâ utrobique radice quadratâ, fiet $z \propto a+b$. Nec aliter fit ſi fuerit $zz \propto aa+bc+2a\sqrt{bc}$, erit enim $z \propto a+\sqrt{bc}$. Non ſecus ſi xx æquetur $-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, erit $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$. Pag. 7.

His ſubjunge ſequens exemplum, in quo omnes præcedentes modi reductionis ſimul occurrunt. Proponatur $\sqrt{\frac{zz+3aa}{4}} - \sqrt{\frac{zz-3aa}{4}} \propto \sqrt{\frac{azz}{b}}$: quia igitur eorum, quæ æqualia ſunt, æqualia quoque ſunt quadrata, fiet, multiplicando utramque partem in ſe quadratè, $\frac{1}{2}zz - \sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}} \propto \frac{azz}{b}$. Addatur jam utrinque $\sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}}$, & ſubtrahatur $\frac{azz}{b}$, transferendo ſcilicet ipſas in alteram partem ſub contrario ſigno, ut habeatur $\sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}}$ ſola ex unâ parte, fietque $\frac{1}{2}zz - \frac{azz}{b} \propto \sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}}$. Quo facto, multiplicetur rurſus utraque pars æquationis in ſe quadratè, ut evaneſcat ſignum radicale; habebiturque $\frac{1}{4}z^4 - \frac{az^4}{b} + \frac{aaz^4}{bb} \propto \frac{z^4-9a^4}{4}$. Ubi ſi utrinque dematur $\frac{1}{4}z^4$, ac reliquæ partes omnes addendo ac ſubtrahendo ex unâ parte in alteram transferantur, quod fit mutatis tantùm ſignis, erit $\frac{az^4}{b} - \frac{aaz^4}{bb} \propto \frac{9a^4}{4}$. Porrò ut deleantur fractiones, reducantur omnes termini ad communem denominatorem $4bb$: quo peracto, ſi utrinque per eundem multiplicetur, ipſum nempe denominatorem omittendo, obtinebitur $4abz^4 - 4aaz^4 \propto 9a^4bb$. Dividatur jam ubique per a, hoc eſt, a ubique deleatur, fitque $4bz^4 - 4az^4 \propto 9a^3bb$: quo facto, dividatur utraque pars per $4b-4a$, ut habeatur quantitas z^4 ex unâ parte ſola, eritque $z^4 \propto \frac{9a^3bb}{4b-4a}$. Ubi ſi utrobique extrahatur radix quadrata, habebitur $zz \propto \frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}$: & ſi denuò utrinque extrahatur radix quadrata, invenietur $z \propto \sqrt{\frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}}$.

E quibus patet, reductionem per additionem & ſubtractionem inſtitui tam ad diminuendam multitudinem terminorum, quàm ad æquationem ritè ordinandam; reductionem verò per multiplica-

tionem ad evitandas tum fractiones tum quantitates ſurdas; & reductionem per diviſionem, tam ad deprimendas dimenſiones, quàm ad reducendam æquationem ad debitam formam & ſimpliciſſimos terminos; ac denique reductionem per extractionem radicis, ad obtinendam æquationem ex minimis terminis conſtantem; præterquam quòd omnes hæ reductiones etiam ad quantitatem quæſitam ex datâ æquatione inveniendam utiles eſſe poſſint. Atque hæc quidem ad introductionem Methodi Geometriæ Renati Des-Cartes dicta ſufficiant.

FINIS.

MONITUM

PRiuſquam Lector ad Geometriæ lectionem accedat, hæc quæ ſequuntur errata emendare rogatur. Pag. 30. lin. ult. *$ez - - egzz$* lege *$ez^3 - egzz$*. p. 79. l. 1. omiſſa ſunt hæc verba: *& poſt $-4x^3$ habetur $-19xx$, quæ ſunt duo ſigna ſimilia.* p. 83. l. 12. *$y - 6n \propto o$* lege *$y - 6n \propto x$*. p. 127. l. penult. ſcribendum: *quem ſequatur* y *cum* x, *poſtea* x *ſine* y, *& tandem terminus, in quo neque* x *neque* y *reperiatur.* p. 128. l. 10. lege *quæ antea cum* y^2 *jungebantur.* p. 129. l. ult. corrigenda eſt radix juxta pag. 31. tum ante primam lineam ſequentis paginæ, legantur ex mente D. de Beaune hæc verba: *Deinde ſumenda eſt* m^2 *pro omnibus terminis in vinculo, in quibus* x *non reperitur, cujus quantitas* m *eadem eſt in æquatione propoſitâ cum eâ, quæ eſt extra vinculum; ſed aliàs poteſt eſſe diverſa, quo caſu loco* m *extra vinculum præſtat quodammodo aliam literam aſſumere. Poſt quæ &c.* p. 130. l. 16. & 17. lege *eadem quantitas exiſtat, quæ in* m^2 *in vinculo. Quâ quidem methodo &c.* p. 132. l. 13. *pro hâc figurâ* lege *pro hâc linea* AL. p. 134. l. 5. lege *erit ipſa latus tranſverſum.* Ibid. l. 9. dele *ſeu* AL. p. 138. l. 6. dele PH $\propto o$. p. 139. l. 6. producatur linea ſuperducta ad finem numeri. p. 150. initio l. 6. pro e^4 ſcribe $6e^4$. Ibid. l. 19. pro $\propto o$ ſcribe $\propto v$. p. 159. l. 17. $\frac{1}{37}p^3$ ſcribe $\frac{1}{27}p^3$. p. 161. l. 2. *ſeu* $\frac{2}{3}$ lege *ſeu* $-\frac{2}{3}p$. p. 163. l. 23. *relatio* lege *relationes*. p. 196. l. 10. pro $a\sqrt{\frac{a}{c}}$ lege $a\sqrt{\frac{c}{a}}$, ubi juxta mentem D. à Schooten addi etiam poteſt. *Similiter pro* $d + \frac{bb - bd}{b + d}$ *ſcribi poteſt* $\frac{dd + bb}{b + d}$. *Sic etiam loco* $d + \frac{bb}{b + d}$ *ſcribi poteſt* $b + \frac{dd}{b + d}$: *cum ſub eodem denominatore reducti, faciant* $\frac{bb + bd + dd}{b + d}$. Ibid. l. 14. poſt $\frac{c - a}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$, addatur *vel* $\sqrt{c} - \sqrt{a}$. p. 253. l. 21. loco literæ *x* ponatur ubiq; lit. *y*. p. 263. lin. 30. *inter ſe* lege *ſibi invicem*. p. 285. lin. 22. & p. 291. lin. 6. $- - 2a^2dy$ lege $+ 2a^2dy$. p. 286. l. 17. & p. 291. l. penult. itemque p. 293. l. 2. pro *in x ducta* lege *in y ducta*. p. 287. l. 21. *in x ductis* lege *in y ductis*. p. 291. l. 24. $+ a^2cy$ lege $+ 2a^2cy$. p. 292. l. 23. & 24. invertantur ſigna 8.